استاد زهرا شکوه غازانی

Subject
Date آمار و احتمال مهندسی - 3 واحدی برق و کامپیوتر - نیمسال اول 97

- آمار توصیفی -

آمار : جمع آوری اطلاعات + طبقه بندی + تجزیه و تحلیل + نتیجه گیری + پیش بینی

جامعه : مجموعه ای از افراد و اشیا   نمونه : بخشی از جامعه

داده های آماری (اطلاعات آماری) → گسسته (جدا) / پیوسته

طبقه بندی داده های آماری :

داده های نوع I) گسسته وقتی تعداد داده ها کم باشد

داده های نوع II) گسسته وقتی تعداد داده ها زیاد و تنوع کم باشد .

مثال : 2, 7, 3, 9, 4, 2, 2, 2, 7, 3, 9, 9, 4, 2

نشان دسته	فراوانی
2	5
3	2
4	2
7	2
9	3
	14

$R_1 = \frac{F_1}{n}$ → فراوانی تجمعی نسبی

$R_2 = \frac{F_2}{n}$

$\vdots$

$R_k = \frac{F_k}{n} \rightarrow \frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_k}{n} = \frac{f_1}{n} + \cdots + \frac{f_k}{n}$

$= 1$

+ جدول داده های نوع II در حالت کلی به این شکل است :

نشان دسته	فراوانی مطلق	فراوانی تجمعی	فراوانی نسبی	فراوانی تجمعی نسبی
x_i	f_i	F_i	r_i	R_i
x_1	f_1	$F_1 = f_1$	$r_1 = \frac{f_1}{n}$	$R_1 = r_1$
x_2	f_2	$F_2 = f_1 + f_2$	$r_2 = \frac{F_2}{n}$	$R_2 = r_1 + r_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	f_k	$F_k = f_1 + \cdots f_k$	$r_k = \frac{f_k}{n}$	$R_k = r_1 + \cdots + r_k$
	$\sum_{i=1}^{k} f_i = n$	$= n$		$= 1$

$\sum_{i=1}^{k} f_i = n$ ← تعداد کل داده ها

PAPCO

Subject
Date

داده های نوع III (پیوسته) وقتی تعداد داده ها زیاد و تنوع داده ها نیز زیاد باشد.

مثال: 2, 7, 3, 9, 11, 14, 17, 18, 12, 6, 5, 6, 5

الف) طبقه بندی با مرز مشترک

حدود طبقات	f_i	طول طبقات	میان طبقه x_i
[2-6)	4	4	$\frac{2+6}{2} = 4$
[6-10)	4		$\frac{6+10}{2} = 8$
[10-14)	2		12
[14-18)	2		16
[18-22)	1		20

(x_i در هر سطر: $+h_i$)

طول طبقات $= h_i = c_{i+1} - c_i =$ کران بالای طبقه - کران پایین طبقه

* برای تبدیل داده های خام به داده های طبقه بندی شده باید یکی از دو اطلاع زیر به ما داده شود.

الف) طول طبقات ب) تعداد طبقات

الف: اگر طول طبقات داده شده باشد از کوچکترین داده شروع می‌کنیم و به اندازه‌ی طول طبقات پیش می‌رویم و این را تا جایی ادامه می‌دهیم که همه‌ی داده ها را شامل شود.

ب: اگر تعداد طبقات داده شده باشد طول طبقات را به این روش محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\text{بزرگترین داده} - \text{کوچکترین داده}}{\text{تعداد طبقات}}$$

← عدد حاصل را گرد می‌کنیم = طول طبقات

ب) طبقه بندی با مرز غیرمشترک

حدود طبقات	f_i	طول طبقات	میان طبقه x_i
[2-6]	6		$\frac{2+6}{2} = 4$
[7-11]	3		9
[12-16]	2		14
[17-21]	2		19
	13		

(x_i در هر سطر: $+5$)

طول طبقات $= h_i = c_{i+1} - c_i + 1$

(c_{i+1}: کران بالا، c_i: کران پایین)

Subject
Date

جدول طبقه بندی با مرز غیر مشترک :

$c_i - c_{i+1}$ حدود طبقات	میان طبقه x_i
$c_1 - c_2$	x_1
$c_2 - c_3$	x_2
$c_3 - c_4$	x_3
⋮	⋮
$c_k - c_{k+1}$	x_k
	$x_k = \frac{c_k + c_{k+1}}{2}$

بقیه جدول مرتب همون جدول گفته اولیه

- معیار یا شاخص های آماری :

الف) معیارهای مرکزی :

1 ① میانگین $(\bar{x})$

$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ (داده نوع I) ، $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{n}$ (تنوع داده ها)

n ← تعداد کل داده ها

داده های نوع II ، III (که فراوانی دارن)

2-A ② میانه $(\tilde{x})$ ← عددی که 50٪ داده ها کمتر یا مساوی آن باشد.

(تعیین میانه در داده های نوع I)

* اگر تعداد داده ها فرد باشد عدد وسط میانه است.

* اگر تعداد داده ها زوج باشد میانگین دو عدد وسط میانه است.

* برای میانه اول ترتیب مرتب کردن داده ها

2-B ③ تعیین میانه در داده های پیوسته (نوع سوم)

n = تعداد کل داده ها → $F_{i-1} \leq \frac{n}{2} < F_i$

⇐ میانه در سطر i ام است

$\tilde{x} = c_i + \frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i} \times h_i$

($\tilde{x}$: مقدار دقیق؛ c_i: کران پایین طبقه i ام؛ f_i: فراوانی مطلق؛ h_i: طول طبقات)

3-A ④ چندک $(Q_p$ و $0<P<1)$

* Q_p چندک رتبه P نامیده می شود هرگاه $100P$ درصد داده ها کمتر یا مساوی آن باشد

$Q_{0/3}$ ← 30%

انواع : I) چارک : $Q_{0/25}$ ، $Q_{0/5}$ (میانه) ، $Q_{0/75}$

II) دهک : $Q_{0/1}$ ، $Q_{0/2}$ ، ... ، $Q_{0/9}$ ($Q_{0/5}$ میانه)

III) صدک : $Q_{0/01}$ ، $Q_{0/02}$ ، ... ، $Q_{0/99}$ ($Q_{0/05}$ میانه)

* میانه حالت خاصی از چندک هم

$r = [(n+1) \cdot P]$ ← جزء صحیح

$\omega = (n+1) \cdot P - [(n+1) \cdot P]$ ← جزء اعشاری

$\Rightarrow Q_p = (1-\omega) x_r + \omega x_{r+1}$

↓ داده ای که در مکان r ام هست

r $r+1$

Subject
Date

⑤ تعیین صدک در داده های پیوسته (III) 3-B

تعداد کل داده ها $= n$

$\rightarrow F_{i-1} \leq n \times p < F_i$

$\Leftarrow Q_p$ در سطر iام است.

$$Q_p = C_i + \frac{np - F_{i-1}}{f_i} \times h_i$$

کران پایین سطر iام

⑥ مد (نما) $(\hat{x})$ 4-A

* عددی که دارای بیشترین فراوانی باشد

- در داده های گسسته : داده ای که بیشتر تکرار شده

مد منحصر به فرد نیست (می توانیم مثلاً 3 تا مد داشته باشیم)

⑦ مد در داده های پیوسته : 4-B

سطر iام $\longrightarrow$ سطر دارای بیشترین فراوانی

$\Leftarrow$ مد در سطر iام است

$$\hat{x} = C_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{2f_i - f_{i-1} - f_{i+1}} \times h_i$$

ب) معیارهای پراکندگی :

① دامنه تغییرات (R)

$R = x_n - x_1 =$ بزرگترین داده $-$ کوچکترین داده

② واریانس (S^2) و انحراف معیار (S)

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^2$$

یا

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{k} f_i x \right)^2 \right\}$$

* در داده های نوع I $\leftarrow f_i$ در فرمول حذف می شود.

* $S = \sqrt{S^2}$

مثال : مفهوم واریانس : x_i : وزن محصولات تولیدی کارخانه (gr)

$(gr) \longleftarrow \bar{x} = 50$

$(gr)^2 \longleftarrow S^2 = 9$

$(gr) \longleftarrow S = 3$

$\Rightarrow 50-3 <$ وزن محصولات $< 50+3$

$\rightarrow$ وزن محصولات : 50 ± 3

PAPCO

Subject
Date

③ ضریب تغییرات (C.V.)

$$C.V = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{\text{انحراف معیار}}{\text{میانگین}}$$

مثال: (داده‌های نوع I) $3, 1, 2, 0, 1$

- میانگین: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = \frac{3+1+2+0+1}{5} = 1{,}4$

- میانه: $0, 1, 1, 2, 3 \quad n=5 \xrightarrow{\div 2} 2{,}5 \rightarrow 3 \quad \tilde{x} = x_3 = 1$

- $Q_{0{,}25} = ? \quad n=5, \ P = 0{,}25 \rightarrow r = [6 \times 0{,}25] = [1{,}5] = 1$
  $\omega = 1{,}5 - 1 = 0{,}5$
  $\rightarrow Q_{0{,}25} = (1-\omega) x_r + \omega x_{r+1} = (1-0{,}5) x_1 + 0{,}5 x_2 = 0{,}5$

- مد: 1

معیارهای مرکزی

-

- دامنه تغییرات: $R = 3 - 0 = 3$

- واریانس: $S^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum x_i \right)^2 \right\}$

$\sum x_i = 3+1+2+0+1 = 7 \quad \sum x_i^2 = 3^2+1^2+2^2+0^2+1^2 = 15 \Rightarrow S^2 = \frac{1}{5-1} \left\{ 15 - \frac{1}{5}(7)^2 \right\} = 1{,}3$

- $C.V = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{1{,}3}}{1{,}9} = 0{,}81$

مثال: (داده نوع II)

x_i^2	$F_i x_i$	x_i	F_i
4	6	2	3
9	12	3	4
49	63	7	9
81	36	9	4
	117		20

- میانگین: $\bar{x} = \frac{\sum F_i x_i}{n} = \frac{117}{20} = 5{,}85$

Subject
Date

میانه: $n=20 \xrightarrow{\div 2} 10 , 11$ $\tilde{x} = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{7+7}{2} = 7$

$Q_{0,6} = ?$ $n=20 , P=0,6$

$r = [21 \times 0,6] = [12,6] = 12$ $\rightarrow Q_p = (1-\omega) x_r + \omega x_{r+1}$

$\omega = 12,6 - 12 = 0,6$

$= (1-0,6) x_{12} + 0,6\, x_{13} = 7$

مد $= 7$

دامنه تغییرات $R = 9 - 2 = 7$

واریانس: $S^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum f_i x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum f_i \cdot x_i)^2 \right\}$

$S^2 = \frac{1}{20-1} \left\{ 813 - \frac{1}{20} (117)^2 \right\} = 6,76$

ضریب تغییرات $C.V = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{6,76}}{5,85} = 0,44$

مثال داده های نوع 3:

حدود طبقات	f_i	x_i (میان طبقه)	$f_i x_i$	F_i ($0 < 0,8 < 2$)	x_i^2	$f_i x_i^2$
0 − 2	2	1	2	2	1	2
2 − 4	1	3	3	3 → F_{i-1}	9	9
4 − 6	2	5	10	5 → F_i (→4)	25	50
6 − 8	3	7	21	8	49	147
	8		36			208

(بین 2 و 3 که 3 را می‌گیریم $i=3$)

میانگین: $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n} = \frac{36}{8} = 4,5$

میانه: $\frac{n=8}{2} = 4 \rightarrow$ میانه در طبقه سوم است

$\tilde{x} = C_i + \frac{n/2 - F_{i-1}}{f_i} \times h_i = 4 + \frac{4-3}{2} \times 2 = 5$

$Q_{0,1} =$ $n=8$, $P=0,1$ $\rightarrow np = 0,8 \rightarrow$ در طبقه اول است $Q_{0,1}$ $Q_p = C_i + \frac{np - F_{i-1}}{f_i} \times h_i$

$= 0 + \frac{0,8 - 0}{2} \times 2 = 0,8$

تمرین: ص 25 ت 10, 7, 9, 3, 1

Subject
Date

نما: در سطر چهارم است → $\hat{x} = C_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{2f_i - f_{i-1} - f_{i+1}} \times h_i = 6 + \frac{3-2}{6-2-0} \times 2 = 6.5$

دامنه تغییرات $R = 7 - 1 = 6$

واریانس: $s^2 = \frac{1}{n-1}\left\{\sum f_i x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum f_i x_i\right)^2\right\}$

$$= \frac{1}{8-1}\left\{208 - \frac{1}{8}(36)^2\right\} = 6.57$$

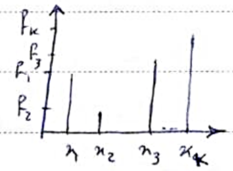
$C.V = \frac{s}{\bar{x}} = 0.56$

(نمودارها)

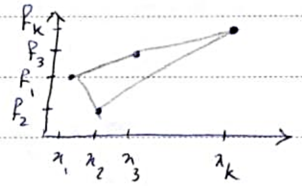
- نمودارهای آماری داده‌های نوع II

x_i	f_i
x_1	f_1
x_2	f_2
⋮	⋮
x_k	f_k

الف) نمودار میله‌ای (ستونی)



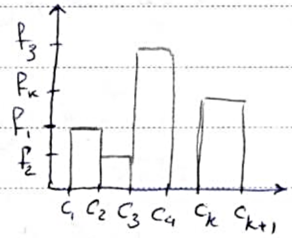
ب) نمودار چندبر (چندبر فراوانی - چندضلعی)



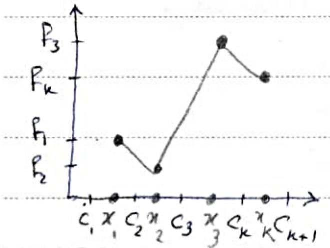
- نمودار داده‌های نوع III

حدود طبقات	f_i	x_i
$C_1 - C_2$	f_1	x_1
$C_2 - C_3$	f_2	x_2
$C_3 - C_4$	f_3	x_3
⋮	⋮	⋮
$C_k - C_{k+1}$	f_k	x_k

الف) نمودار مستطیلی (هیستوگرام فراوانی)



ب) نمودار چندبر (چندبر فراوانی - چندضلعی)



وسط مستطیل

(نمودارهای ب روی شکل مثل الف ساده‌تر)

Subject
Date

- فصل دوم احتمال -

آزمایش: عملی که نتیجه‌ی آن را نمی‌توان با قاطعیت تعیین کرد.

* فضای نمونه (S) ← مجموعه‌ی همه‌ی نتایج ممکن یک آزمایش.

مثال: فضای نمونه‌ی پرتاب تاس ← $S_1=\{1,2,3,4,5,6\}$

فضای نمونه پرتاب دو تاس ← $S_2=\{(x,y) \mid x=1,2,\dots,6 \quad y=1,2,\dots,6\}$

فضای نمونه پرتاب یک سکه ← $S_3=\{H,T\}$

فضای نمونه پرتاب 2 سکه ← $S_4=\{HH,HT,TH,TT\}$

فضای نمونه پرتاب 3 سکه ←

$S_5=\{HHH,HHT,HTH,HTT,TTT,THT,THH,TTH\}$

فضای نمونه پرتاب یک سکه تا آمدن اولین شیر

$S_6=\{H,HT,TTH,TTTH,\dots\}$ ممکنه هیچ وقت نیاد شیر

فضای نمونه طول عمر یک قطعه الکتریکی با کارکرد حداکثر دو سال

$S_7=\{x \mid 0\le x\le 2\}$

فضای نمونه:
- گسسته — متناهی / نامتناهی
- پیوسته

* پیشامد ← هر زیرمجموعه از فضای نمونه یک پیشامد است.

یک پیشامد زمانی رخ می‌دهد که فقط یکی از اعضای آن رخ دهد ← برای اینکه A رخ بده کافیه یا 2 یا 4 یا 6 رخ بده

مثال: پیشامد آمدن عدد زوج در پرتاب یک تاس ← $A=\{2,4,6\}$

پیشامد آمدن مجموع حداکثر 3 در پرتاب 2 تاس ← $B=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$

شیر در پرتاب یک سکه ← $C=\{H\}$

آمدن حداقل یک شیر در پرتاب دو سکه ← $D=\{HH,HT,TH\}$

آمدن حداکثر یک شیر در پرتاب 3 سکه ← $E=\{TTT,HTT,THT,TTH\}$

اینکه اولین شیر حداقل در چهارمین پرتاب متوالی بیاید ← $F=\{TTTH,TTTTH,\dots\}$

PAPCO

(8)

[illegible]

Subject
Date

* احتمال : احتمال پیشامد A را با P(A) نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$P(A) = \frac{\text{حالت‌های مطلوب}}{\text{حالت‌های ممکن}} = \frac{A \text{ حالت‌های}}{S \text{ حالت‌های}}$$

حالت‌های A ← وقتی محدودیت مسئله

حالت‌های S ← کل حالت‌های ممکن (بی محدودیت)

فرمول‌ها

① هرگاه A و S مجموعه‌های گسسته و متناهی باشند .

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{A \text{ تعداد اعضای}}{S \text{ تعداد اعضای}}$$

مثال قبل : $P(A) = \frac{3}{6}$ $P(B) = \frac{3}{36}$ $P(C) = \frac{1}{2}$ $P(D) = \frac{3}{4}$ $P(E) = \frac{9}{8}$

② هرگاه A و S مجموعه‌های پیوسته و به صورت طول باشند .

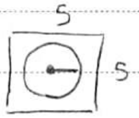
$$P(A) = \frac{l(A)}{l(S)} = \frac{A \text{ طول}}{S \text{ طول}}$$

$$P(G) = \frac{l(G)}{l(S)} = \frac{2-1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

③ هرگاه A و S مجموعه‌های پیوسته و به صورت مساحت باشد

$$P(A) = \frac{a(A)}{a(S)} = \frac{A \text{ مساحت}}{S \text{ مساحت}}$$

$$P(\text{برخورد تیر به دایره}) = \frac{\text{مساحت دایره}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{\pi(1)^2}{5 \times 5} = \frac{\pi}{25}$$



* فضاهای احتمال : (پیشامد A، B، C)

① $0 \leq P(A) \leq 1$ ② $P(A') = 1 - P(A)$ $A_{\text{مکمل}} = A_{\text{متمم}} = A^C = \bar{A} = A'$

③ $P(\emptyset) = 0 \Rightarrow P(S) = 1$ ④ $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

⑤ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

⑥ A و B ناسازگار (جدا) باشند $\xrightarrow{A \cap B = \emptyset}$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

⑦ $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$

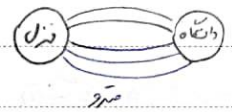
⑧ $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

⑨ A,B,C دو به دو ناسازگار $\rightarrow P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

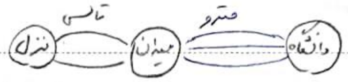
Subject
Date

احتمال (عدد) | پیشامد (مجموعه) | گزاره (جمله) | قانون ضرب + قانون جمع (۱۰)

+	∪	یا	قانون جمع
×	∩	و	قانون ضرب



تاکسی یا مترو : $2+3=5$ راه



تاکسی و مترو $2\times3=6$ راه

مثال ص 70 (شماره 92):

آمدن 6 ← Y

نیامدن 6 ← N

$S=\{Y, NY, NNY, NNNY, \dots\}$

الف) $A=\{NNY, NNNY, NNNNY, \dots\}$

حداقل 3 پرتاب $P(A)=P(NNY)+P(NNNY)+P(NNNNY)+\dots$

$=P(N)\cdot P(N)\cdot P(Y)+(P(N))^3P(Y)+(P(N))^4P(Y)+\dots$

$=(\frac{5}{6})^2(\frac{1}{6})+(\frac{5}{6})^3(\frac{1}{6})+(\frac{5}{6})^4(\frac{1}{6})+\dots$ سری هندسی

$=\frac{\text{جمله اول}}{1-\text{قدر نسبت}}=\frac{(5/6)^2(1/6)}{1-\frac{5}{6}}=\frac{25}{36}$

روش دوم الف (با متمم) → $A'=\{Y, NY\}$ $\quad P(A)=1-P(A')=1-\{P(Y)+P(NY)\}$

$\to P(A)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$

ب) P(تعداد پرتاب‌ها زوج باشند) → $B=\{NY, NNNY, NNNNNY, \dots\}$

$P(B)=P(NY)+P(NNNY)+P(NNNNNY)+\dots$

$=P(N)\cdot P(Y)+(P(N))^3P(Y)+(P(N))^5P(Y)+\dots$

$=\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}+(\frac{5}{6})^3(\frac{1}{6})+(\frac{5}{6})^5(\frac{1}{6})+\dots=\frac{\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}}{1-(\frac{5}{6})^2}=\frac{5/36}{11/36}=\frac{5}{11}$

P4PCO

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Subject
Date

ص ۶۹ تمرین 31 :

$$P(\text{دو تا با یک شماره و سه تا با یک شماره}) = \frac{13\times\binom{4}{3} \times 12\times\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$$

رنگ ۴	1, 2, 3, ..., 13
رنگ 3	1, 2, 3, ..., 13
رنگ 2	1, 2, 3, ..., 13
رنگ 1	1, 2, 3, ..., 13

سه تا با یک شماره = (هر سه 13) یا ... یا (هر سه 2) یا (هر سه یک)

$$= \binom{4}{3}+\binom{4}{3}+\dots+\binom{4}{3} = 13\times\binom{4}{3}$$

* احتمال شرطی (مشروط)

(حکم: B ، فرض: A)

$$P(B|A) = \begin{cases} \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} & P(A)\neq 0 \\ 0 & P(A)=0 \end{cases}$$

← نتیجه: اگر $P(A)\neq 0$ آنگاه:

$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B|A)$ ← وقتی مسئله ترتیب داشته باشد

اگر $P(A)\neq 0$, $P(A\cap B)\neq 0$ آنگاه:

$$P(A\cap B\cap C) = P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|A\cap B)$$

مثال ص 43

(3 سفید، 7 سیاه) ← ②

الف) $P(\text{هر دو سیاه}) \overset{\text{بدون ترتیب}}{=} \dfrac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}}$

روش 2 با ترتیب ← $P(\text{اولی سیاه , دومی سیاه}) = P(\text{اولی سیاه})\cdot P(\text{دومی سیاه | اولی سیاه})$

$$= \frac{7}{10}\times\frac{6}{9}$$

ب) $P(\text{اولی سیاه , دومی سفید}) \overset{\text{با ترتیب}}{=} P(\text{اولی سیاه})\cdot P(\text{دومی سفید | اولی سیاه}) = \dfrac{7}{10}\times\dfrac{3}{9}$

ج) $P(\text{یکی سیاه , یکی سفید}) = \dfrac{\binom{3}{1}\times\binom{7}{1}}{\binom{10}{2}}$

روش 2 با ترتیب ← $P(\text{اولی سفید})\cdot P(\text{دومی سیاه | اولی سفید}) \overset{\text{یا}}{+} P(\text{اولی سیاه})\cdot P(\text{دومی سفید | اولی سیاه})$

$$= \frac{3}{10}\times\frac{7}{9} + \frac{7}{10}\times\frac{3}{9} = \frac{2\times3\times7}{10\times9}$$

ص ۱۰۳ ← 26, 27 , 35, 37, 38

Subject
Date

* دو پیشامد مستقل $P(A\cap B) = P(A) . P(B) \iff$ دو پیشامد A و B مستقل اند

← نتیجه: اگر A و B مستقل باشند آن گاه $P(B|A) = P(B)$

قضیه: اگر A و B مستقل باشند آن گاه:

الف) A و B' مستقلند

ب) A' و B مستقلند

ج) A' و B' مستقلند

مثال ص 95 مثال 73 $A_1, A_2, \ldots$ مستقل $P(\text{برخورد تیر به هدف}) = \frac{3}{4} = P(A_i)$

الف) $P(\text{یک اصابت و در پی آن دو عدم اصابت}) \overset{\text{با ترتیب}}{=} P(A_1 \cap A_2' \cap A_3') = P(A_1) \cdot P(A_2') . P(A_3') = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$

ب) $P(\text{دو اصابت در 3 شلیک}) \underset{\text{با ترتیب}}{\overset{\text{۱۰۱}}{=}} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3') + (P A_1 \cap A_2' \cap A_3) + P(A_1' \cap A_2 \cap A_3)$

$= \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = (\frac{3}{4})^3$

$\xrightarrow{\text{با (۲۰۱)}} \binom{3}{2} (\frac{3}{4})^2 (\frac{1}{4}) = (\frac{3}{4})^3$

↖ با ترتیب بر اصول اهمیت دارد

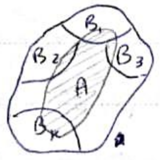
ج) $P(\text{شش اصابت در 20 شلیک}) = \binom{20}{6} (\frac{3}{4})^6 (\frac{1}{4})^{20-6}$

$P(\text{چهارده عدم اصابت در 20 شلیک}) = \binom{20}{14} (\frac{1}{4})^{14} (\frac{3}{4})^{20-14}$

$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

PAPCO

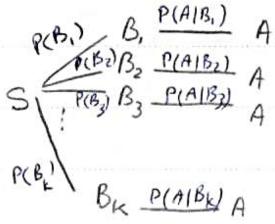
از این بخش بیشتر سؤال میاد



* قانون احتمال کل :

$$P(A) = P((A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup\cdots(A\cap B_k))$$
$$= P(A\cap B_1) + P(A\cap B_2) + \cdots + P(A\cap B_k)$$
$$= P(A|B_1)\cdot P(B_1) + \cdots + P(A|B_k)\cdot P(B_k)$$
$$\longrightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)\cdot P(B_i)$$

* نمودار درختی قانون احتمال کل :



$P(A) =$ ابتدا عناصر هر شاخه های هم سطح را در هم ضرب کرده و سپس نتایج حاصل را باهم جمع می کنیم

* قضیه بیز :

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)\cdot P(B_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)\cdot P(B_i)} \qquad j=1,2,\dots,k$$

(صورت: $\frac{P(A\cap B_j)}{P(A)}$)

* قضیه بیز با استفاده از نمودار درختی :

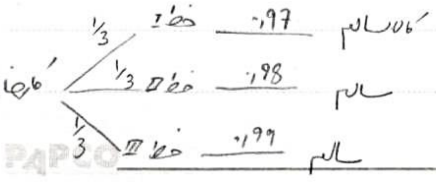
$$P(B_2|A) = \frac{\text{حاصلضرب عناصر شاخه های شامل } B_2 \text{ و } A}{\text{قانون احتمال کل}}$$

* نکته 1 : $P(A'|B) = 1 - P(A|B)$

* نکته 2 : $P(A\cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A\cap B|C)$

- کارخانه ای محصولات خود را توسط سه خط 1، 2، 3 تولید می کند . بنابه تجربه می دانیم 97٪ محصولات خط 1 و 98٪ خط 2 و 99٪ خط 3 سالم هستند . یک کالا به تصادف از کارخانه خریداری می کنیم

الف) احتمال سالم بودن این کالا چقدر است ؟



$$P(\text{سالم بودن}) = \frac{1}{3}\times 0.97 + \frac{1}{3}\times 0.98 + \frac{1}{3}\times 0.99$$

قانون احتمال کل

ص ۱۰۹ ، 58 ، 61 ، 63 ، 68

(بالای 63: اتمیه)

(زیر 61: همه ۱۰ رو کنیم)

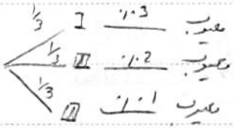
شرطی

ب) اگر این کالا سالم باشد احتمال اینکه توسط خط I تولید شده باشد چقدر است؟

ج) اگر این کالا معیوب باشد احتمال اینکه توسط خط 2 یا 3 تولید شده باشد چقدر است

د) اگر این کالا معیوب باشد احتمال اینکه توسط خط I تولید شده باشد؟

ب) P(خط I تولید کرده باشد | کالا سالم باشد) $= \dfrac{\frac{1}{3} \times \%97}{\text{الف}}$



د) P(خط I تولید کرده باشد | کالا معیوب باشد) $= \dfrac{\frac{1}{3} \times \%3}{\frac{1}{3} \times \%3 + \frac{1}{3} \times \%2 + \frac{1}{3} \times \%1}$ ← متمم الف

↓ این متمم ب نیست (برا متمم باید شرط ها یکی باشن)

ج) P(خط II یا III تولید کرده | کالا معیوب) = P(خط I | کالا معیوب) = متمم د = $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

روش 2 ← P(خط II | معیوب) + P(خط III | معیوب) − P(خط II ∩ خط III | معیوب)

$= \dfrac{\frac{1}{3} \times \%2 + \frac{1}{3} \times \%1}{\frac{1}{3} \times \%3 + \frac{1}{3} \times \%2 + \frac{1}{3} \times \%1}$

Subject
Date

فصل دوم: متغیرهای تصادفی (X, Y, Z, ...)

متغیر تصادفی تابعی است از فضای نمونه ی آزمایش به زیرمجموعه ای از اعداد حقیقی. متغیرهای تصادفی را با حروف بزرگ لاتین نمایش می دهیم و مقدار برد متغیر تصادفی را که یک عدد حقیقی است «یافته» می گوییم و با حروف کوچک متناظر با متغیر نمایش می دهیم.

$X: S \to S_x \quad , \quad S_x \subseteq R$

(X: متغیر تصادفی — S: دامنه — S_x: برد متغیر تصادفی)

$\omega \in S \Rightarrow X(\omega) = x$

(X: متغیر تصادفی — ω: عضوی از دامنه — x: یافته (عضو S_x))

S_x به یکی از چهار صورت زیر خواهد بود:

- S_x گسسته و متناهی باشد $\{1, 2, 3\}$
- S_x گسسته و نامتناهی $\{1, 2, ...\}$

→ متغیر تصادفی X گسسته است

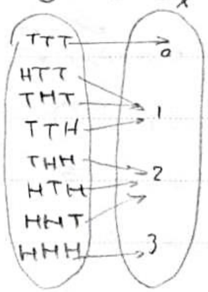
- S_x پیوسته و به صورت یک فاصله $[1, 9]$
- S_x پیوسته و به صورت اجتماع فواصل $[1, 4) \cup [3, 9]$

→ متغیر تصادفی X پیوسته است

مثال: سکه ای را سه بار پرتاب می کنیم (3 سکه را یکبار پرتاب می کنیم). متغیر تصادفی X را تعداد شیرهای رو شده در 3 پرتاب تعریف می کنیم. مقادیر برد این متغیر تصادفی را بنویسید، نوع متغیر را مشخص کنید و احتمال هر عضو را بنویسید.

X: تعداد شیرهای رو شده در 3 پرتاب

$S \longrightarrow S_x$



$X(TTT) = 0$

$X(HTT) = 1$

$S_x = \{0, 1, 2, 3\}$ → X متغیر تصادفی گسسته است

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

تابع احتمال (تابع چگالی - تابع توزیع احتمال) متغیر تصادفی گسسته:

گسسته: (P) تابع احتمال / (f) تابع چگالی

پیوسته — (f) تابع چگالی

Subject

Date

$\omega \xrightarrow{X} x \xrightarrow{f} f(x)$

به عنوان ورودی — نتیجه

توجه

$P(x) = P_X(x) = f(x) = f_X(x) = P(X = x)$

احتمال اینکه مقدار متغیر تصادفی X برابر x شود.

ویژگی تابع احتمال متغیر گسسته

$\forall x : P(x) \geq 0$ ①

$\sum_x P(x) = 1$ ②

مثال در تابع زیر k را طوری بیابید که یک تابع احتمال باشد. در این سوال: ۱. یک متغیر یا ۲ متغیر؟ ۲. گسسته یا پیوسته؟

$$f(x) = \begin{cases} k(x+1) & x = 0, 1, 2 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$\sum_x f(x) = 1 \longrightarrow \sum_{x=0,1,2} k(x+1) = 1 \Rightarrow k(1+2+3) = 1 \longrightarrow k = \frac{1}{6}$$

ب) $P(X=1) = P(1) = f(1) = \frac{1}{6}(1+1) = \frac{1}{3}$

ج) $P(X=3) = 0$

د) $P(-1 \leq x \leq \frac{3}{2}) = P(X=0 \text{ یا } X=1) = P(X=0) + P(X=1)$

$= \frac{0+1}{6} + \frac{1+1}{6} = \frac{1}{2}$

ه) $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \dots = \frac{1}{2}$

* تابع توزیع تجمعی:

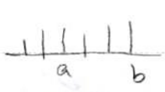
$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} P(t)$$

* ویژگی های تابع توزیع تجمعی:

$0 \leq F(x) \leq 1$ ①

$F_X(-\infty) = 0$ ②

$F_X(+\infty) = 1$



$a < b \Rightarrow F_X(a) \leq F_X(b)$ ← تابع F صعودی است ③

بین a تا b هیچی نباشد

④ تابع F حداقل از سمت راست پیوسته است. $F(a^+) = F(a)$

چون صعودی

Subject
Date

مثال: در مثال پرتاب 3 سکه مطلوب است تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X.

تابع احتمال

x	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{8} & 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{8}+\frac{3}{8} & 1 \le x < 2 \\ \frac{7}{8} & 2 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

(از راست پیوسته)

* محاسبه‌ی احتمال با استفاده از تابع توزیع تجمعی

① $P(a<X\le b) = P(X\le b) - P(X\le a) = F(b) - F(a)$

② $P(a\le X\le b) = P(X\le b) - P(X<a) = F(b) - F(a^-)$

③ $P(a<X<b) = P(X<b) - P(X\le a) = F(b^-) - F(a)$

④ $P(a\le X<b) = P(X<b) - P(X<a) = F(b^-) - F(a^-)$ برش a. هر دو شامل نمی‌شود. یک ذره کمتر از

⑤ $P(X\ge a) = 1 - P(X<a) = 1 - F(a^-)$

⑥ $P(X=a) = P(X\le a) - P(X<a) = F(a) - F(a^-)$

$F(x) = P(X \le x)$

مثال: در مثال پرتاب سه سکه مطلوب است محاسبه‌ی احتمال زیر با استفاده از دو روش:

الف) روش تابع احتمال ← P   ب) روش تابع توزیع تجمعی ← F

$P(\frac{1}{2} < x < 3)$

الف) $P(X=1) + P(X=2) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{6}{8}$

ب) $F(3^-) - F(\frac{1}{2}) = \frac{7}{8} - \frac{1}{8} = \frac{6}{8}$

* محاسبه‌ی تابع احتمال با استفاده از تابع توزیع تجمعی گسسته

- فرض کنید تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی گسسته داده شده باشد و بخواهیم تابع احتمال آن را بیابیم. در این صورت 1. ابتدا جدول تابع احتمال را رسم کرده و مقادیر متغیر را با استفاده از نقاط مرزی تابع توزیع تجمعی می‌نویسیم 2. مقدار احتمال هر نقطه را با استفاده از فرمول ⑥ فوق بدست می‌آوریم.

Subject
Date

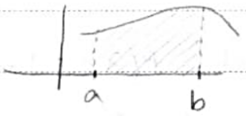
مثال: در مثال 3 شکل تابع توزیع تجمعی را در نظر گرفته و از روی آن تابع احتمال را بیابید.

x	0	1	2	3
$f(x)$	$F(0)-F(0^-) = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}$	$F(1)-F(1^-) = \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$	$F(2)-F(2^-) = \frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$ ↓ جمع اونا = 1

* تابع چگالی متغیر تصادفی پیوسته ← از لفظ چگالی فقط استفاده می‌کنیم (نه احتمال)

فرض کنید X متغیر تصادفی پیوسته باشد تابع $f(x)$ را تابع چگالی متغیر تصادفی می‌گوییم هرگاه در رابطه‌ی زیر صدق کند:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$



نتیجه: در حالت پیوسته داریم:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$$

* ویژگی‌های تابع چگالی f:

① $\forall x, \; f(x) \geq 0$ ② $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

مثال: تابع چگالی زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x) = \begin{cases} k(x+1) & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

الف) k را بیابید. ← متغیره - پیوسته

الف) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_0^2 k(x+1)\,dx + \int_2^{+\infty} 0 = 1 \rightarrow \frac{k}{2}(x+1)^2\Big|_0^2 = 1$$

$$\rightarrow \frac{k}{2}[9-1] = 1 \rightarrow k = \frac{1}{4}$$

ب) $P(-1 < X < 1) = \int_{-1}^{0} 0 + \int_0^1 \frac{1}{4}(x+1)\,dx = \frac{1}{8}(x+1)^2\Big|_0^1 = \frac{3}{8}$

ج) $P(4 < X < 6) = \int_4^6 0 = 0$

د) $P(X = 1) = \int_1^1 (\frac{1}{4})(x+1) = 0$

PAPCO

۱۵

ه) $P(X \leq 1) = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_{0}^{1} \frac{1}{4}(x+1)\,dx = \frac{3}{8}$

تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی پیوسته:

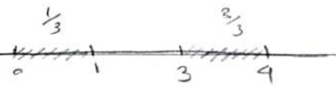
$$F(x) = F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

ویژگی‌ها : مانند حالت گسسته.

محاسبه‌ی احتمال با استفاده از تابع توزیع تجمعی : همان ۶ فرمول حالت گسسته

مثال ص 126 : تابع چگالی زیر را در نظر بگیرید و با استفاده از آن ت.ت.ت متغیر تصادفی X را بنویسید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & 0 < x < 1 \\ \frac{2}{3} & 3 < x < 4 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$



$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{3} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \leq x < 3 \\ \frac{2x-5}{3} & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

$x < 0 : F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 = 0$

$0 \leq x < 1 : F(x) = \int_{-\infty}^{x} = \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_{0}^{x} \frac{1}{3}dx = \frac{x}{3}$

$1 \leq x < 3 : F(x) = \int_{-\infty}^{x} = \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_{0}^{1} \frac{1}{3}dx + \int_{1}^{x} 0 = \frac{x}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

$3 \leq x < 4 : F(x) = \int_{-\infty}^{x} = \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_{0}^{1} \frac{1}{3}dx + \int_{1}^{3} 0 + \int_{3}^{x} \frac{2}{3}dx = \frac{2x-5}{3}$

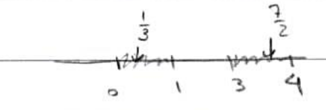
$\left(\frac{2x}{3}\right)\Big|_3^x = \frac{2x}{3} - \frac{6}{3} + \frac{1}{3} \quad \frac{3x}{3} - \frac{6}{3} = x - 2$

$x \geq 4 : F(x) = \int_{-\infty}^{x} = \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_{0}^{1} \frac{1}{3}dx + \int_{1}^{3} 0 + \int_{3}^{4} \frac{2}{3}dx + \int_{4}^{x} 0 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$

مثال : در مثال فوق مطلوب است محاسبه‌ی احتمال زیر با دو روش :

$P\left(\frac{1}{2} \leq X < \frac{7}{2}\right)$

الف) روش تابع چگالی ب) روش تابع توزیع تجمعی



الف) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{3}\,dx + \int_{1}^{3} 0 + \int_{3}^{\frac{7}{2}} \frac{2}{3}\,dx$

$= \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{7}{2}-3\right) = \frac{1}{2}$

ب) $F\left(\frac{7}{2}^-\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\times\frac{7}{2}-5}{3} - \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{3/2}{3} = \frac{1}{2}$

* محاسبه ی تابع چگالی با استفاده از تابع توزیع تجمعی برای متغیر پیوسته

داشتیم: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \xrightarrow[\text{نسبت } x]{\text{مشتق}} \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

در مثال قبل فرض کنید تابع توزیع تجمعی داده شده باشد مطلوب است محاسبه تابع چگالی آن: $F(x)$ را داریم

(مشتق $0^+ \neq 0^-$)

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{3} & 0<x<1 \\ 0 & 1<x<3 \\ \frac{2}{3} & 3<x<4 \\ 0 & x>4 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{3} & 0<x<1 \\ \frac{2}{3} & 3<x<4 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

مساوی نمی‌داریم چون مشتق‌پذیر نیست

* تابع احتمال (تابع توزیع احتمال - تابع چگالی) دو متغیر تصادفی گسسته

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی گسسته باشند تابع احتمال توأم یا تابع احتمال دو متغیر تصادفی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$P(x,y) = P_{X,Y}(x,y) = f(x,y) = f_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$

ویژگی های تابع احتمال توأم (دو متغیر) گسسته:

① $\forall (x,y): P(x,y) \geq 0$

② $\sum_{y}\sum_{x} P(x,y) = 1$

اگه احتمال ⊖ شد می‌گیم تابع چگالی نیست

Year. Month. Day. Subject.

مثال) تابع احتمال توأم زیر مفروض است . (دو متغیره گسسته)

$$P(x,y) = \begin{cases} k(x+y) & x=0,1 \quad y=0,1,2 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

الف) k را بیابید :

الف) $\sum_y \sum_x P(x,y) = 1 \xrightarrow{\text{متغیرها}} \sum_{x=0,1} \sum_{y=0,1,2} k(x+y) = 1$

تعداد شمارنده سیگمای بیرونی

$k(0+1+2+1+2+3) = 1 \longrightarrow k = \frac{1}{9}$

ب) $P(X=1, Y=2) = P(1,2) = \frac{1+2}{9} = \frac{1}{3}$

ج) $P(X=2, Y=1) = 0$ نداریم $x=2$

د) $P(\underbrace{X\leq 1}_{0 \text{ تا } 1}, \underbrace{Y\geq 1}_{1 \text{ تا } 2}) = P(0,1) + P(0,2) + P(1,1) + P(1,2)$

$= \frac{0+1}{9} + \frac{0+2}{9} + \frac{1+1}{9} + \frac{1+2}{9} = \frac{8}{9}$

هـ) $P(X<Y) = P(0,1) + P(0,2) + P(1,2) = \frac{0+1}{9} + \frac{0+2}{9} + \frac{1+2}{9} = \frac{7}{9}$

و) $P(X+Y<1) = P(0,0) = \frac{0+0}{9} = 0$

ص 165 ادامه

* ص 155 تاس .

آزمایش : پرتاب تاس ۴ وجهی ۲ بار

متغیر X : عدد رو شده در پرتاب اول

Y : Max (پرتاب اول , پرتاب دوم) = Max(x, پرتاب دوم)

۱ = پرتاب ۲

$P(X=1, Y=1) = P(X=1).P(Y=1) = P(X=1).P(\max(1,$ پرتاب دوم$)=1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

$P(X=2, Y=1) = P($پرتاب اول $= 2).P(\underbrace{\max(2,\text{پرتاب دوم})=1}_{\emptyset}) = \frac{1}{4} \times 0 = 0$

$P(X=1, Y=2) = P($پرتاب اول $=1) . P(\max(1,$ پرتاب دوم$)=2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

۲ = پرتاب دوم

$P(X=2, Y=2) = P($پرتاب اول $=2) , P(\max(2,$ پرتاب دوم$)=2) = \frac{1}{4}(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}) = \frac{2}{16}$

iman NOTEBOOK

۲ یا ۱ = پرتاب دوم

17, 16, 15, 10, 9, 7, 6, 5, 4, 1 ت 186 ص

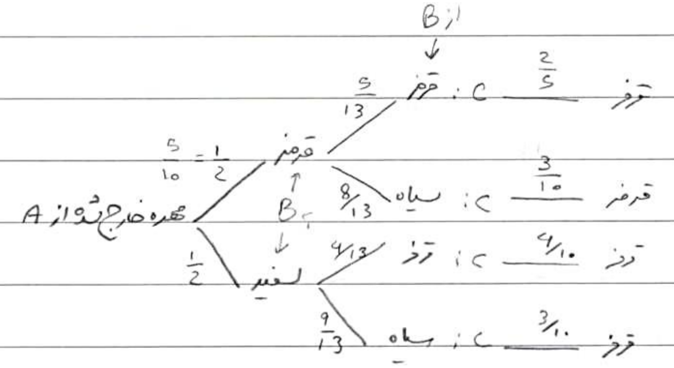
Year. Month. Day. Subject.

ب) $P(\frac{X}{Y}=1) = P(X=Y) = P(1,1)+P(2,2)+P(3,3)+P(4,4)$

$= \frac{1}{16}+\frac{2}{16}+\frac{3}{16}+\frac{4}{16} = \frac{10}{16}$

جدول توزیع ب:

مثال 68 ص



$\frac{5}{10}\times\frac{5}{13}\times\frac{2}{5} + \frac{5}{10}\times\frac{8}{13}\times\frac{3}{10} + \frac{5}{10}\times\frac{4}{13}\times\frac{4}{10} + \frac{5}{10}\times\frac{9}{13}\times\frac{3}{10}$

۲ فرض کنید X, Y دو متغیر تصادفی باشند. تابع $f(x,y)$ را تابع چگالی (توأم) این دو متغیر تصادفی می‌گوییم هرگاه در رابطه زیر صدق کند:

$$P((x,y)\in A) = \iint_A f(x,y)\,dA$$

که در آن: $dA = dx\,dy = dy\,dx$

نتیجه:

$$P(a\le X\le b,\ c\le Y\le d) = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

$\int_a^b f(x)\,dx$ ← مساحت ، $\int_a^b dx \to ab$ طول بازه ، $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \to$ حجم ، $\iint_A dx\,dy$ ← مساحت

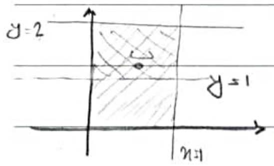
ویژگی های تابع چگالی: ① $\forall(x,y): f(x,y)\ge 0$ ② $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

Year. Month. Day. Subject.

مثال: تابع چگالی زیر مفروض است. الف) k را بیابید

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x+y) & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

دو متغیره ی پیوسته - شکل می‌کشیم



$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow \int_0^2\int_0^1 k(x+y)\,dx\,dy = 1$$

$$\rightarrow \int_0^2 k\left(\frac{x^2}{2}+yx\right)\Big|_0^1 dy = 1 \Rightarrow \int_0^2 k\left(\tfrac{1}{2}+y\right) dy = 1$$

$$\Rightarrow k\left(\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{2}y^2\right)\Big|_{y=0}^{y=2} = 1 \Rightarrow k(1+2-0) = 1 \rightarrow k = \frac{1}{3}$$

ب) احتمال اینکه $P(-1 \le X \le 1,\ 1 \le Y \le 3)$ را حساب کنید.

اشتراک با ناحیه

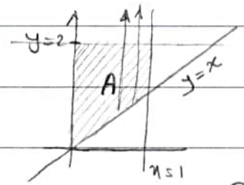
$$= \int_1^2\int_0^1 \tfrac{1}{3}(x+y)\,dx\,dy = \int_1^2 \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}x^2+yx\right)\Big|_{x=0}^{x=1} dy$$

$$= \int_1^2 \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}+y\right) dy = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{2}y^2\right)\Big|_1^2 = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2}\right) = \frac{2}{3}$$

هـ) $P(X=1,\ 1<Y<2)$ ← صفر (خط، نقطه ۰)

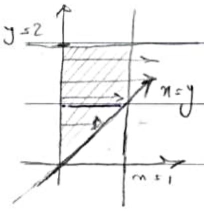
ج) احتمال $P(2<X<3,\ 0<Y<1)$ چون x توی بازه نیست $P=0$

د) $P(X<Y)$



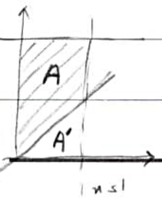
$$P(X<Y) = \iint_A f(x,y)\,dA$$

روش ① اول y → $\int_0^1\int_x^2 \tfrac{1}{3}(x+y)\,dy\,dx =$



روش ② اول x → $\iint \tfrac{1}{3}(x+y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^y \tfrac{1}{3}(x+y)\,dx\,dy + \int_1^2\int_0^1 \tfrac{1}{3}(x+y)\,dx\,dy$

روش ③ →



$$P(A) = 1-P(A') = 1-\iint_{A'} f(x,y)\,dA' = 1-\int_0^1\int_0^x \tfrac{1}{3}(x+y)\,dy\,dx = ?$$

Year. Month. Day. Subject.

تابع چگالی حاشیه‌ای (کناری)

گسسته: $f_X(x) = \begin{cases} P_X(x) = \sum_y P(x,y) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \end{cases}$ = چگالی متغیر x به تنهایی = چگالی حاشیه‌ای x

پیوسته — مقدار رو میذاریم برای y جواب برحسب x بدست میاد.

گسسته: $f_Y(y) = \begin{cases} P_Y(y) = \sum_x P(x,y) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \end{cases}$ = " " y " " = " " y

پیوسته

تابع چگالی شرطی:

چگالی Y با فرض داشتن $X=x$ ← $f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$ (دومی توخرج)

چگالی X با فرض داشتن $Y=y$ ← $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

مثال:

y \ x	0	1	2	$f_Y(y)$
-1	0/1	0/2	0/1	0/4
0	0/1	0/1	0/1	0/3
1	0/2	0	0/1	0/3
$f_X(x)$	0/4	0/3	0/3	

الف. چگالی حاشیه‌ای X و چگالی حاشیه‌ای Y

ب. $P(X=2 \mid Y=0)$

$f_X(x)$: برحسب x خاص مقدارهای y رو جمع می‌کنیم

ب) $\dfrac{P(X=2, Y=0)}{P(Y=0)} = \dfrac{P(2,0)}{P_Y(0)} = \dfrac{0/1}{0/3} = \dfrac{1}{3}$

ج. $P(Y=1 \mid X=-1) = 0$

د. $P(Y \geq 1 \mid X \leq 1) = \dfrac{P(X \leq 1, Y \geq 1)}{P(X \leq 1)} = \dfrac{P(0,1) + P(1,1)}{P_X(0) + P_X(1)} = \dfrac{0/2 + 0}{0/4 + 0/3} = \dfrac{2}{7}$

ه) $P(x \mid y=-1) = \dfrac{P(x, y=-1)}{P_Y(-1)} = \dfrac{P(x,-1)}{0/4}$ (مجهول) — همه xها رو بررسی کنیم

x	0	1	2
$P(x\|-1)$	$\frac{P(0,-1)}{0/4} = \frac{1}{4}$	$\frac{P(1,-1)}{0/4} = \frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

$P(x\leq 2 \mid y=1)$ (الف و $P(2,1)=\frac{1}{8}$

، بررسی مستقل بودن حل کنیم ص 190 ، 21، 21، 24 ، 34، 35، 36، *37، 38

Year. Month. Day. Subject. این تکه مهم

نکته : در حالت پیوسته داریم

① $P(a\leq x\leq b)=\int_a^b f(x)dx$ (انتگرال ، اتغیر پیوسته)

② $P(a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d)=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$ (دو متغیر)

به جای y را می‌گذاریم عدد c

*③ $P(a\leq x\leq b \mid Y=c)=\int_a^b f(x\mid c)\,dx$ (یک متغیر، شرطی) → $\frac{f(x,c)}{f_Y(y)}$ ← فرمول احتمال شرطی

*④ $P(a\leq x\leq b \mid c\leq y\leq d)=\frac{P(a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d)}{P(c\leq y\leq d)}=\frac{\text{فرمول ②}}{\text{فرمول ①}}$

← مقادیر چگالی حاشیه‌ای را از c تا d با هم جمع می‌کنیم

ص 172 ، ص 175

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)} & x\geq 0,\ y\geq 0\\ 0 & o.w.\end{cases}$$

الف) چگالی حاشیه‌ای Y ، چگالی حاشیه‌ای X

ب) $P(0<x<1 \mid 1<Y<2)$

الف. $f_x(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^{+\infty}e^{-(x+y)}dy=-e^{-(x+y)}\Big|_{y=0}^{+\infty}=0-(-e^{-x})=e^{-x}$ برحسب x

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^{+\infty}e^{-(x+y)}dx=-e^{-(x+y)}\Big|_0^{+\infty}=e^{-y}$ برحسب y

ب) $\frac{P(0<x<1,\ 1<Y<2)}{P(1<Y<2)}=?$ صورت: $P(0<x<1,\ 1<y<2)=\iint f(x,y)\,dx\,dy$

$=\int_1^2\int_0^1 e^{-(x+y)}\,dx\,dy$

$=\left(\int_0^1 e^{-x}dx\right)\left(\int_1^2 e^{-y}dy\right)=(1-e^{-1})(e^{-1}-e^{-2})$

یادآوری: $\int_{\text{عدد }2}^{\text{عدد }1}\int_{\text{عدد }4}^{\text{عدد }3} f(x)\cdot g(y)\,dx\,dy=\left(\int_{\text{عدد }4}^{\text{عدد }3}f(x)dx\right)\left(\int_{\text{عدد }2}^{\text{عدد }1}g(y)dy\right)$

مخرج: $P(1<Y<2)=\int f(y)dy=\int_1^2 e^{-y}dy=-e^{-y}\Big|_1^2=e^{-1}-e^{-2}$ (چگالی حاشیه‌ای y)

$\Rightarrow P(0<x<1 \mid 1<Y<2)=\frac{(1-e^{-1})(e^{-1}-e^{-2})}{e^{-1}-e^{-2}}=1-e^{-1}$

NOTEBOOK iman

$$P(x<y \mid x<3y) = \frac{P(x<y,\ x<3y)}{P(x<3y)} = \frac{P(x<y)}{P(x<3y)}$$

Year. Month. Day. Subject.

* استقلال دو متغیر تصادفی (مستقل بودن)

دو متغیر تصادفی x و y مستقلند $\iff f(x,y) = f(x) \cdot f(y)$

یعنی تابع چگالی توأم آنها برابر حاصل ضرب چگالی حاشیه آن‌ها باشد.

مثال: در مثال قبل آیا x و y مستقل اند؟ باید $f(x,y) \overset{?}{=} f(x) \cdot f(y)$

$\rightarrow e^{-(x+y)} = e^{-x} \cdot e^{-y}$ ✓ → مستقل اند

مثال: نسبت ← $f(1,-1) = f_X(1) \cdot f_Y(-1) \Rightarrow 0{,}18 = 0{,}3 \times 0{,}6$

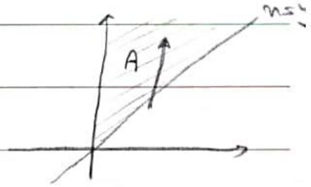
y \ x	1	2	f(y)
-1	0,18	0,42	0,6
0	0,12	0,28	0,4
f(x)	0,3	0,7	1

$\forall (x,y): f(x,y) = f(x) \cdot f(y)$ → x و y مستقلند

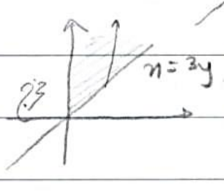
سؤال 37 ص 190

$$P(x<y \mid x<3y) = \frac{P(x<y,\ x<3y)}{P(x<3y)} = \frac{P(x<y)}{P(x<3y)}$$

صورت: $P(x<y) = \iint_A f(x,y)\, dA = \int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} e^{-(x+y)}\, dy\, dx = ?$



مخرج: $P(x<3y) = \iint_B f(x,y)\, dB = \int_0^{\infty}\int_{\frac{1}{3}x}^{\infty} e^{-(x+y)}\, dy\, dx$



NOTEBOOK iman

Year. Month. Day. Subject.

فصل ۹ : امید ریاضی (مقدار مورد انتظار ـ میانگین)

X : متغیر تصادفی $\qquad f(x)$: تابع چگالی X

E : امید ریاضی ـ انتظار $\qquad Ex$: امید ریاضی x = مقدار مورد انتظار x

$$Ex = \begin{cases} \sum_x x P(x) & \text{گسسته} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx & \text{پیوسته} \end{cases}$$

مثال : انتظار دارید چند مهره سفید خارج شود؟ (x, E)

(۲) [ظرف: ۲ سفید، ۲ سیاه]

x : تعداد مهره‌های سفید خارج شده

با ترتیب

x	0 (دو مهره سیاه)	1	2
$P(x)$	$\frac{2}{4} \times \frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}\times\frac{2}{3} + \frac{2}{4}\times\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}$
	$\frac{2}{12}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{2}{12}$

$$Ex = \sum_x x P(x) = 0 \times \frac{2}{12} + 1 \times \frac{8}{12} + 2 \times \frac{2}{12} = 1$$

← انتظار داریم / احتمال میدهیم تعداد مهره‌های سفید خارج شده ۱ باشد.

مثال : شخصی می‌خواهد ماشین خود به مبلغ 100 میلیون تومان را بیمه کند. شرکت بیمه بر اساس تجربیات قبلی خود در مورد چنین ماشین هایی می‌داند که با احتمال $\frac{1}{1000}$ کل مبلغ و با احتمال $\frac{1}{100}$ نصف مبلغ و با احتمال $\frac{1}{10}$ ربع مبلغ را باید به عنوان خسارت بپردازد. برای سایر مبالغ بیمه تعهدی نمی‌کند.
شرکت بیمه چه حق بیمه‌ای دریافت کند تا سودی معادل 100 هزار تومان بابت بیمه‌ی هر یک از این ماشین ها بدست آورد؟

x : مبلغی که بیمه باید به عنوان خسارت بپردازد

	کل مبلغ	نصف	$\frac{1}{4}$	سایر مبالغ
x	100,000,000	50,000,000	25,000,000	
$P(x)$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	$1-(\frac{1}{1000}+\frac{1}{100}+\frac{1}{10})$

$$Ex = \sum x P(x) = 100{,}000 + 500{,}000 + 2{,}500{,}000 = 3{,}100{,}000$$ ← بطور میانگین این مقدار باید خسارت بدهد

$$\text{حق بیمه} = 3{,}100{,}000 + 100{,}000 = 3{,}200{,}000$$

* امید ریاضی تابعی از یک متغیر تصادفی :

متغیر تصادفی : x

تابع چگالی : $f(x)$

تابعی از متغیر تصادفی : $g(x)$

$$E(g(x)) = \begin{cases} \sum_x g(x) f(x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\, dx \end{cases}$$

* امید ریاضی تابعی از دو متغیر تصادفی

دو متغیر تصادفی : X, Y

چگالی توأم : $f(x,y)$

تابعی از دو متغیر تصادفی $g(x,y)$

$$E(g(x,y)) = \begin{cases} \sum_y \sum_x g(x,y) f(x,y) & \text{گسسته} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y)\, dx\, dy & \text{پیوسته} \end{cases}$$

(چگالی ← $f(x,y)$)

* نتیجه :

دو متغیر تصادفی x, y

چگالی توأم $f(x,y)$

تابعی از متغیر X : $g(x)$

تابعی از متغیر Y : $h(y)$

$$E(g(x)) = \begin{cases} \sum_x g(x) f(x) & \text{گسسته} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\, dx & \text{پیوسته} \end{cases}$$

$$E(h(y)) = \begin{cases} \sum_y h(y) f(y) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) f(y)\, dy \end{cases}$$

مثال گسسته :

$y \backslash x$	1	2	3	$f(y)$
-1	0.1	0.1	0.2	0.4
0	0.2	0.1	0.1	0.4
1	0.1	0	0.1	0.2
$f(x)$	0.4	0.2	0.4	1

الف) $EX^2 = \sum_x x^2 f(x) = 1^2 \times 0.4 + 2^2 \times 0.2 + 3^2 \times 0.4 = 4.8$

ب) $EY^3 = \sum_y y^3 f(y) = (-1)^3(0.4) + 0^3 \times 0.4 + 1^3 \times 0.2 = -0.2$

ج) $EXY^2 = \sum_y \sum_x x y^2 f(x,y) =$ (-1,0,1) (1,2,3)

$(1)(-1)^2(0.1) + 2(-1)^2(0.1) + 3(-1)^2(0.2) + (1)(0)^2(0.2)$

$+ (2)(0)^2(0.1) + 3(0)^2(0.1) + (1)(1)^2(0.1) + (2)(1)^2(0) + 3(1)^2(0.1) =$

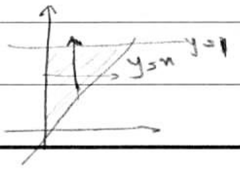
مثال :

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & 0<x<y,\ 0<y<1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

الف) $EX^2 = \int x^2 f(x)\, dx$

چگالی حاشیه‌ای $f(x) = \int f(x,y)\, dy = \int_x^1 2\, dy = 2(1-x)$

چگالی دو متغیره داریم در انتگرال‌گیری ← از روی شکل را اعمال کنیم



Year. Month. Day. Subject.

ادامه مثال:

$Ex^2 = \int x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\, 2(1-x)\,dx = 2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}$

ب) $E\sqrt{y} = \int \sqrt{y}\, f(y)\,dy \qquad f(y) = \int f(x,y)\,dx = \int_0^y 2\,dx = 2y$

$E\sqrt{y} = \int_0^1 \sqrt{y}\,(2y)\,dy = 2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$

ج) $Ex^2y = \iint x^2y\, f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^y 2x^2y\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{2}{3}y^4\,dy = \frac{2}{15}$

اول y رو می‌نویسیم چون حدود x داره

* ویژگی های امید ریاضی:

x متغیر تصادفی

a,b: مقادیر ثابت

① $E(ax+b) = aEx+b$

② $E(ax) = aEx$

③ $E(b) = b$

تعمیم:

x و y دو متغیر تصادفی

① $E(x+y) = Ex+Ey$

② $E(x-y) = Ex-Ey$

③ x, y مستقل باشند $\Rightarrow Exy = Ex.Ey$

④ $E\left(\frac{x}{y}\right) \neq \frac{Ex}{Ey}$

اگه این فرمول کار نکرد اصلا با ورود می‌نویسیم.

* امید ریاضی های خاص:

① میانگین (μ_x, μ)

$\mu_x = \mu = Ex$

میانگین

$\bar{x} \rightarrow$ نمونه

$\mu_x \rightarrow$ جامعه

ویژگی ها:

① $\mu_{ax+b} = a\mu_x + b$ ② $\mu_{ax} = a\mu_x$ ③ $\mu_b = b$

Year. Month. Day. Subject.

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right)^2\right\}$$

2) واریانس (σ^2 ، S_n^2 یا $\operatorname{Var}x$)

$$\sigma_x^2 = \operatorname{var}x = E(x-\mu_x)^2$$

تخصیص : همواره داریم

$$* \quad \sigma_x^2 = \operatorname{var}x = Ex^2 - (Ex)^2 \quad (Ex)^2 \to E^2x$$

تغییرات هر کدوم نسبت به میانگین

ویژگی :

1. $\operatorname{var}(ax+b) = a^2 \operatorname{var}x$

2. $\operatorname{var}(ax) = a^2 \operatorname{var}x$

3. $\operatorname{var}(b) = 0$

4. $\operatorname{var}x \geq 0 \longrightarrow$ توان ۲ ه

مثال :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{26}x^2 & 0<x<3 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

الف) $\operatorname{var}(-2x-4) = 4\operatorname{var}x = 4 \times 0{,}17$

$$\operatorname{var}x = Ex^2 - E^2x = 5{,}6 - (2{,}3)^2 = 0{,}17$$

$$Ex = \int x f(x)\,dx = \int_0^3 x \frac{3}{26}x^2\,dx = 2{,}3$$

$$Ex^2 = \int x^2 f(x)\,dx = \int_0^3 x^2 \frac{3}{26} x^2\,dx = 5{,}6$$

3) کوواریانس ($\operatorname{Cov}(x,y)$ یا $\sigma_{x,y}$ یا $\sigma(x,y)$) ← دو متغیر بود کوواریانس ، یکی بود واریانس

① $\begin{cases} x\uparrow \\ y\uparrow \end{cases}$ یا $\begin{cases} x\downarrow \\ y\downarrow \end{cases} \Rightarrow \operatorname{cov}(x,y) > 0$

② $\begin{cases} x\uparrow \\ y\downarrow \end{cases}$ یا $\begin{cases} x\downarrow \\ y\uparrow \end{cases} \Rightarrow \operatorname{cov}(x,y) < 0$

③ x,y مستقل باشند $\Rightarrow \operatorname{Cov}(x,y) = 0$

رابطه‌ای باهم ندارن

تعریف : $\operatorname{cov}(x,y) = \sigma(x,y) = E(x-\mu_x)(y-\mu_y)$

تخصیص : $* \quad \operatorname{cov}(x,y) = \sigma(x,y) = Exy - Ex \cdot Ey$

NOTEBOOK iman

ویژگی های کوواریانس :

متغیرهای تصادفی : X, Y, X_i, Y_i

ثابت : a, b, c, d

① $Cov(X, a) = 0$

② $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$

③ $Cov(X, X) = var X = EX^2 - (EX)^2$

④ مستقل باشند $X, Y \Rightarrow Cov(X, Y) = 0$

⑤ $Cov(aX, cY) = ac\, Cov(X, Y)$

⑥ $Cov(X + b, Y + d) = Cov(X, Y)$

⑦ $Cov(aX + b, cY + d) = ac\, Cov(X, Y)$

⑧ $Cov(X_1 + X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$

⑨ $Cov(a_1X_1 + a_2X_2 + a_3, b_1X_1 + b_2X_2 + b_3) = a_1b_1 var X_1 + a_2b_2 var X_2 + (a_1b_2 + a_2b_1) Cov(X_1, X_2)$

⑩ $a_1^2 var X_1 + a_2^2 var X_2 + 2a_1a_2 Cov(X_1, X_2)$

$a_1X_1 + a_2X_2$

$b_1X_1 + b_2X_2$

مثال ص 219 :

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy & 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$Cov(2X - Y + 1, -3X + 4Y - 2) = -6 var X - 4 var Y + (8 + 3) Cov(X, Y)$

$2X - Y$

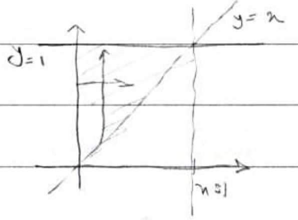
$-3X + 4Y$

$var X = EX^2 - E^2X = \frac{1}{3} - \left(\frac{8}{15}\right)^2 = \frac{11}{225}$

$EX = \int x f(x) dx = \int_0^1 x\, 4x(1 - x^2) dx = \frac{8}{15}$

$f(x) = \int f(x,y) dy = \int_x^1 8xy\, dy = 4x(1 - x^2)$

$EX^2 = \int x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2\, 4x(1 - x^2) dx = \frac{1}{3}$



$var y:\ f(y) = \int f(x,y) dx = \int_0^y 8xy\, dx = 4y^3$

$EY = \int y f(y) dy = \int_0^1 y(4y^3) dy = \frac{4}{5}$

$EY^2 = \int_0^1 y^2\, 4y^3 dy = \frac{4}{6}$ $\quad var y = \frac{4}{6} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{23}{75}$

$Cov(X, Y) : EXY - EX\,EY = 0.017$

$EXY = \iint xy f(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_0^y xy\, 8xy\, dx dy = \frac{8}{18}$

Year. Month. Day. Subject.

* ضریب همبستگی ($\rho_{x,y}$ یا $\rho(x,y)$)

$$\rho(x,y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var X \cdot Var Y}}$$

ویژگی ها :

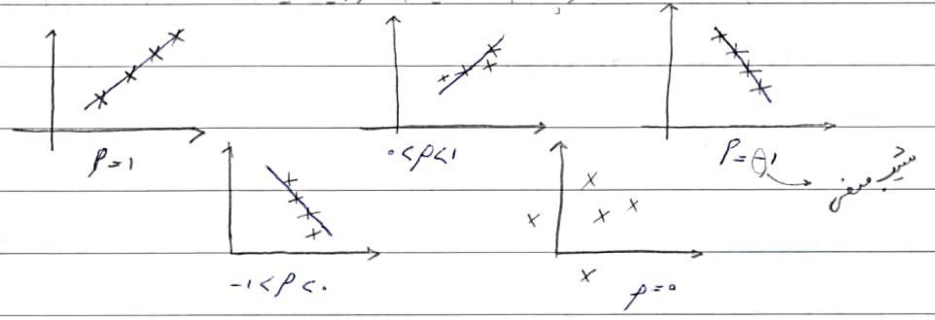
1) $-1 \le \rho \le 1$

2) $\rho(ax+b, cy+d) = \rho(x,y)$

مثال : در مثال قبل

$$\rho(2x-3, 4y+5) = \rho(x,y) = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var x \cdot Var y}} = \frac{0.017}{\sqrt{\frac{11}{225} \times \frac{23}{75}}} =$$

مفهوم : هرچی نقاط به خط نزدیک تر باشن ρ به ۱ نزدیک تره



* تابع مولد گشتاور

x : متغیر تصادفی

$f(x)$: چگالی

تابع مولد گشتاور : $m_x(t) = M_x(t)$

متغیر تصادفی x در نقطه t

$$m_x(t) = E(e^{tx})$$

$$= \sum e^{tx} p(x) \quad \text{یا} \quad \int$$

چرا به این تابع مولد گشتاور می‌گوییم :

$$\frac{dm_x(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} E(e^{tx}) = E\left(\frac{d}{dt} e^{tx}\right)_{t=0}$$

$$= E(xe^{tx})_{t=0} = Ex \rightarrow$$ گشتاور مرتبه اول

$$\frac{d^{(2)}m_x(t)}{dt}\Big|_{t=0} = Ex^2 =$$ گشتاور مرتبه دوم

یکبار مشتق ← Ex

دوبار مشتق ← Ex^2

⋮

$$\frac{d^{(r)}m_x(t)}{dt}\Big|_{t=0} = E(x^r) \Rightarrow$$

با مشتق n ام برحسب t از تابع مولد گشتاور $E(x^n)$ را

Year. Month. Day. Subject.

مثال ص 223

$M_X(t) = e^{3t+8t^2}$, $Z = \frac{X-3}{4}$, $\mu_Z = ?$ $\sigma_Z^2 = ?$

$\mu_X = EX = \frac{d}{dt}(M_X(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} e^{3t+8t^2}\Big|_{t=0} = (3+16t)e^{3t+8t^2}\Big|_{t=0} = 3$

$\mu_Z = EZ = E\left(\frac{X-3}{4}\right) = \frac{EX-3}{4} = \frac{3-3}{4} = 0$

$EX^2 = \frac{d^2}{dt^2} M_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left((3+16t)e^{3t+8t^2}\right)\Big|_{t=0} = \left(16e^{3t+8t^2} + (3+16t)^2 e^{3t+8t^2}\right)\Big|_{t=0}$

$= 16 + 3^2 = 25$

$\text{var}X = EX^2 - (EX)^2 = 25 - 3^2 = 16$

$\text{var}Z = \text{var}\left(\frac{X-3}{4}\right) = \frac{1}{16}\text{var}X = \frac{16}{16} = 1$

$ax+b$

* امید ریاضی شرطی (میانگین شرطی) + واریانس شرطی

X, Y : دو متغیر تصادفی

$g(x)$: تابعی از متغیر تصادفی x

$$\mu_{g(x)|Y=y} = E(g(x) \mid Y=y) = \begin{cases} \sum_x g(x) f(x|y) & \text{گسسته} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x|y)\, dx & \text{پیوسته} \end{cases}$$

$$\sigma^2_{X|Y=y} = \text{var}(X \mid Y=y) = E(X^2 \mid Y=y) - E^2(X \mid Y=y)$$

نکته* $\text{var}(aX+b \mid Y=y) = a^2\, \text{var}(X \mid Y=y)$

مثال گسسته

y\x	-1	0	1
1	0/1	0/2	0/1
2	0/2	0/1	0/1
3	0/1	0/1	0

$\text{var}(Y \mid X=-1) = ?$

$= E(Y^2 \mid X=-1) - E^2(Y \mid X=-1)$

$E(Y \mid X=-1) = \sum_y y\, f(y|-1)$

$f(y|-1) = \frac{f(-1,y)}{f_X(-1)} = \frac{f(-1,y)}{0/4}$

y	1	2	3
$f(y\|-1)$	$\frac{f(-1,1)}{0/4} = \frac{0/1}{0/4} = \frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

Year. Month. Day. $var(X|Y=0)$ (تمرین: 30, 25, 24, 22, 15 ص 256) Subject.

$$E(Y|X=-1) = \sum_y y\, f(y|-1) = 1\times\frac{1}{4} + 2\times\frac{2}{4} + 3\times\frac{1}{4} = 2$$

$$E(Y^2|X=-1) = \sum_y y^2 f(y|-1) = 1^2\left(\frac{1}{4}\right) + 2^2\left(\frac{2}{4}\right) + 3^2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{2}$$

$$var(Y|X=-1) = \frac{9}{2} - (2)^2 = \frac{1}{2}$$

مثال سوم -۲

توزیع احتمالی [illegible]

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+2y) & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$var(X|Y=\tfrac{1}{2}) = E(X^2|Y=\tfrac{1}{2}) - E^2(X|Y=\tfrac{1}{2})$$

[illegible] $\frac{1}{2}$ [illegible]

$$f(x|y=\tfrac{1}{2}) = \frac{f(x,\frac{1}{2})}{f_Y(\frac{1}{2})} = \frac{\frac{2}{3}(x+2\times\frac{1}{2})}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{2}\right)\right)=1} = \frac{2}{3}(x+1)$$

$$f_Y(y) = \int f(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)\,dx = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}+2y\right) \quad y=\tfrac{1}{2}$$

$$E(X|Y=\tfrac{1}{2}) = \int_0^1 x f(x|y=\tfrac{1}{2})\,dx = \int_0^1 x\,\frac{2}{3}(x+1)\,dx = \frac{5}{9}$$

$$E(X^2|Y=\tfrac{1}{2}) = \int_0^1 x^2 f(x|y=\tfrac{1}{2})\,dx = \int_0^1 x^2\,\frac{2}{3}(x+1)\,dx = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{18}$$

$$\rightarrow var(X|Y=\tfrac{1}{2}) = \frac{7}{18} - \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{13}{162}$$

Year. Month. Day. Subject.

فصل ۵ : توزیع های مهم

الف) در حالت گسسته :

① توزیع برنولی

آزمایش برنولی : آزمایشی که فقط 2 نتیجه ی ممکن داشته باشد. این دو نتیجه به پیروزی و شکست معروفند

$S = \{$ شکست , پیروزی $\}$

$P($پیروزی$) = p$

$P($شکست$) = q \longrightarrow p + q = 1$

متغیر تصادفی برنولی :

$$X = \begin{cases} 1 & \text{اگر پیروزی داشته باشیم} \\ 0 & \text{اگر شکست داشته باشیم} \end{cases}$$

تابع احتمال برنولی :

$$f(x) = \begin{cases} p & x=1 \\ q & x=0 \end{cases} \qquad p+q=1$$

مثال : آمدن شیر در یک پرتاب یک سکه :

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & x=1 \\ 1/2 & x=0 \end{cases}$$

- آمدن 6 در پرتاب یک تاس :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & x=1 \\ \frac{5}{6} & x=0 \end{cases}$$

- برخورد تیر به هدف دایره‌ای شکل در این شکل :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi(1)^2}{25} & x=1 \\ 1-\frac{\pi}{25} & x=0 \end{cases}$$

* توزیع دوجمله‌ای (Binomial , بینم)

- فرض کنید یک آزمایش برنولی با احتمال پیروزی p را به طور مستقل n بار تکرار کنیم و بخواهیم تعداد پیروزی‌ها در n آزمایش را بشماریم در این صورت یک آزمایش دوجمله‌ای انجام داده‌ایم

Year. Month. Day. Subject.

* تعداد پیروزی‌ها در n آزمایش : X : متغیر دوجمله‌ای

تابع احتمالی دوجمله‌ای :

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & x = 0,1,2,\dots,n \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

قرارداد : تحت شرایط فوق می‌گوییم X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n, p است و می‌نویسیم :

$X \sim Bin(n,p)$

قضیه : هرگاه $X \sim Bin(n,p)$

آنگاه $\mu_x = Ex = np$

$\delta_x^2 = var\,x = npq$

قضیه : هرگاه $x \sim Bin(n,p)$ آنگاه :

$\mu_x = Ex = np \qquad \delta_x^2 = var\,x = npq$

* همچنان تابع احتمالی x می‌توان دانسته باشد از راه مولد گشتاور میرسیم.

اثبات : $m_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(pe^t)^x q^{n-x} = (pe^t+q)^n$

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$

$\mu_x = Ex = \frac{d}{dt} m_x(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(pe^t+q)^n\Big|_{t=0} = npe^t(pe^t+q)^{n-1}\Big|_{t=0}$

$= np\underbrace{(p+q)}_{1}^{n-1} = np$

$Ex^2 = \frac{d^2}{dt^2} m_x(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(npe^t(pe^t+q)^{n-1}\right)\Big|_{t=0} = \left[npe^t(pe^t+q)^{n-1} + n(n-1)p^2e^{2t}(pe^t+q)^{n-2}\right.$

$= np\underbrace{(p+q)}_{1}^{n-1} + n(n-1)p^2\underbrace{(p+q)}_{1}^{n-2} = np + n(n-1)p^2 = np + n^2p^2 - np^2$

$Var\,x = Ex^2 - E^2x = np + n^2p^2 - np^2 - (np)^2 = np(1-p) = npq$

DATE / / SUBJECT: $x \sim Bin(20, \frac{1}{4}) \to f_x(x) = \binom{20}{x}(\frac{1}{4})^x(\frac{3}{4})^{20-x}$ روش ۱:
$F_x(0) = ?$

$x \sim Bin(10, 0.2)$ (n, p)

$P(x \leq 3)$

ص ۲۶۵ و ۲۶۶ ۲۰ تست ، تمارین * جدول توزیع دوجمله‌ای ص 475

الف) روش ۲ (با جدول) $P(x=10) = P(x \leq 10) - P(x \leq 9) = 0.9961 - 0.9861 = 0.01$

$- - + - - + - +$ $3p$

$+ + - - +$ $3 \times p$

③ توزیع دوجمله‌ای منفی ، ثابت: تعداد پیروزی ، متغیر: تعداد آزمایش

– فرض کنید یک آزمایش برنولی با احتمال پیروزی p را به طور مستقل آن قدر تکرار کنیم تا به r امین پیروزی برسیم. در این صورت یک آزمایش دوجمله منفی انجام داده‌ایم.

x: متغیر دوجمله‌ای منفی ← تعداد آزمایش‌های لازم برای رسیدن به r امین پیروزی

$$f(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} & x = r, r+1, \dots \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

مثال ص 268 احتمال شایعه 0.7 ، 8 امین فرد ($r=3$) آزمایش (شنیده شدن) دومین باور

$P(x=8) = \binom{8-1}{3-1}(0.7)^3(0.3)^{8-3} =$ ($r=3$)

الف) x: تعداد افرادی که شایعه را می‌شنوند برای رسیدن به سومین باور

ب) y: تعداد افرادی که شایعه رو باور می‌کنن (از ۸ نفر) $Y \sim Bin(8, 0.7)$ $P(Y=3) = \binom{8}{3}(0.7)^3(0.3)^{8-3}$

④ توزیع هندسی: فرض کنید یک آزمایش برنولی با احتمال پیروزی p را به طور مستقل آن قدر تکرار کنیم تا به اولین پیروزی برسیم. در این صورت یک آزمایش هندسی انجام داده‌ایم.

متغیر هندسی
x ← تعداد آزمایش‌های لازم برای رسیدن به اولین پیروزی

$$f(x) = \begin{cases} q^{x-1} p & x = 1, 2, \dots \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

هندسی ← $r=1$ ← دوجمله‌ای منفی

قرارداد: تحت شرایط فوق می‌گوییم x دارای توزیع هندسی با پارامتر p است و می‌نویسیم: $x \sim G(p)$

قضیه: هرگاه $x \sim G(p)$ آنگاه

$\mu_x = Ex = \frac{1}{p}$, $\delta_x^2 = var x = \frac{q}{p^2}$

اثبات: $m_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} f(x) = \sum_{x=1}^{+\infty} e^{tx} q^{x-1} p = \frac{p}{q} \sum_{x=1}^{+\infty} (qe^t)^x = \frac{p}{q} \times \frac{qe^t}{1-qe^t} = \frac{pe^t}{1-qe^t}$

$$\mu_x = Ex = \frac{d}{dt} m_x(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)_{t=0} = \frac{pe^t(1-qe^t)+pqe^{2t}}{(1-qe^t)^2}\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{pe^t - pqe^{2t} + pqe^{2t}}{(1-qe^t)^2}\Big|_{t=0} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$Ex^2 = \frac{d^2}{dt^2} m_x(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)_{t=0} = \frac{pe^t(1-qe^t)^2 + 2pqe^{2t}(1-qe^t)}{(1-qe^t)^4}\Big|_{t=0} = \frac{p(1-q)^2 + 2pq(1-q)}{(1-q)^4}$$

$$= \frac{(1-q)^2[p+2q]}{(1-q)^4} = \frac{p+q+q}{p^2} = \frac{1+q}{p^2} \qquad \operatorname{var}x = Ex^2 - (Ex)^2 = \frac{1+q}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{q}{p^2}$$

مثال ص 270 $\quad p = 0{,}8 \quad$ x: تعداد کنکورهای لازم برای رسیدن به (اولین) قبولی $\quad x \sim G(0{,}8)$

$$P(x=3) = (0{,}2)^{3-1}(0{,}8) = 0{,}04 \times 0{,}8 = 0{,}032$$

ب. دو جمله‌ای منفی: احتمال اینکه در ششمین کنکور چهارمین قبولی را کسب کند

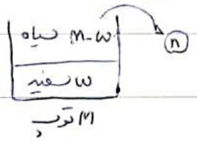
$$P(x=6)_{r=4} = \binom{6-1}{4-1}(0{,}8)^4(0{,}2)^{6-4}$$

ج. دو جمله‌ای: احتمال اینکه در بین 6 کنکور 4 بار قبول شد

$$P(x=4) = \binom{6}{4}(0{,}8)^4(0{,}2)^{6-4}$$

⑤ توزیع فوق هندسی.

نمونه: به تصادف و بدون جایگذاری (n تایی)



x: تعداد مهره‌های سفید موجود در نمونه = (تعداد مهره‌های سفید در n تا)
متغیر فوق هندسی

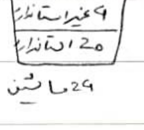
حالی،

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{w}{x}\binom{M-w}{n-x}}{\binom{M}{n}} & x = 0, 1, 2, \dots, \min(n, w) \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

(سفیدها: $\binom{w}{x}$ ، سیاه‌ها: $\binom{M-w}{n-x}$)

مثال ص 272 $\quad$ x: تعداد ماشین‌های غیر استاندارد در بین 6 تا $\quad n=6,\ M=24,\ w=4$

$$P(x \le 1) = P(x=0) + P(x=1) = \frac{\binom{4}{0}\binom{20}{6}}{\binom{24}{6}} + \frac{\binom{4}{1}\binom{20}{5}}{\binom{24}{6}} =$$



⑥ توزیع پواسون: فرض کنید بخواهیم تعداد وقایعی را که در یک فاصله‌ی زمانی یا مکانی یا هر دو رخ می‌دهند را بشماریم. در این صورت یک آزمایش پواسون انجام داده‌ایم

متغیر پواسون: x = تعداد وقایعی که در یک فاصله‌ی زمانی یا مکانی یا هر دو رخ می‌دهند.

μ: میانگین تعداد وقایع → پارامتر پواسون

Sahand

Year. Month. Day. Subject.

مثال پواسون: ب) تعداد وقایع در یک فاصله زمانی (الف) گسسته ،

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & x=0,1,2,\dots \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

قرارداد: تحت شرایط فوق می‌گوییم x دارای توزیع پواسون با پارامتر λ است و می‌نویسیم $x \sim P(\lambda)$

قضیه: هرگاه $x \sim P(\lambda)$ آن گاه داریم $\mu_x = Ex = \lambda$ ، $\sigma_x^2 = var\, x = \lambda$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a$$

اثبات: $M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}$

$$\mu_x = Ex = \frac{d}{dt}(M_x(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(e^{\lambda(e^t-1)})\Big|_{t=0} = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}\Big|_{t=0} = \lambda e^0 e^{1-1} = \lambda$$

$$Ex^2 = \frac{d^2}{dt^2}M_x(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)})\Big|_{t=0} = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)} + \lambda^2 e^{2t}e^{\lambda(e^t-1)}\Big|_{t=0} = \lambda + \lambda^2$$

$$var\,x = Ex^2 - E^2x = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

(مثال)

سوال 8 ص 330

21 سالم
4 معیوب

0,25 ، (3)

$$P(\text{هر سه سالم}) = \frac{\binom{21}{3}\binom{4}{0}}{\binom{25}{3}}$$

ص 275

به طور متوسط در هر 2 ساعت یک مشتری از فروشگاهی خرید می‌کند. مطلوب است احتمال اینکه (الف) در مدت 3 ساعت حداقل 7 مشتری خرید کنند. ب) در مدت دو ساعت دقیقاً 5 مشتری خرید کنند.

x: تعداد مشتری‌هایی که خرید می‌کنند در طول ساعت

$x \sim P(\lambda)$

ساعت	مشتری
2	1
3	$\lambda = 1,5$

$\Rightarrow x \sim P(1,5) : P(x \geq 7) = 1 - P(x \leq 6)$

$= 1 - [P(x=0) + P(x=1) + \dots + P(x=6)]$

$= 1 - \left[\frac{e^{-1,5}(1,5)^0}{0!} + \frac{e^{-1,5}(1,5)}{1!} + \dots + \frac{e^{-1,5}(1,5)^6}{6!}\right] =$

جدول توزیع پواسون: 476 ، 477 ، 478 ← $\mu = \lambda$

$r = 4$? $\mu = 0,2$ → $x \sim P(0,2)$

$P(x \leq 4)$

Year. Month. Day. Subject.

روش 2 برای الف)
$P(x \geq 7) = 1 - P(x \leq 6) = 1 - \begin{pmatrix} \lambda = 1.5 \\ r = 6 \end{pmatrix} = 1 - 0.9991 = 0.009$ (جدول پواسون)

ب) Y: تعداد مشتریانی که در طول 2 ساعت خرید می‌کنند:
$Y \sim P(1)$

$P(Y=5) = P(Y \leq 5) - P(Y \leq 4) = \begin{pmatrix} \lambda = 1 \\ r = 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda = 1 \\ r = 4 \end{pmatrix} = 0.9994 - 0.9963 =$ (جدول)

ب) در حالت پیوسته:

1) توزیع نمایی: متغیر نمایی: X = فاصله زمانی بین دو رخداد پواسون

پارامتر نمایی: θ = میانگین x = متوسط فاصله زمانی بین دو رخداد پواسون

پارامتر پواسون: $\lambda \Rightarrow \theta = \frac{1}{\lambda}$

تابع چگالی توزیع نمایی:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} & x \geq 0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

قرارداد: تحت شرایط فوق می‌گوییم x دارای توزیع نمایی با پارامتر θ است، می‌نویسیم $x \sim \mathcal{E}(\theta)$

قضیه: هرگاه $x \sim \mathcal{E}(\theta)$ آن‌گاه:
$\mu_x = Ex = \theta \quad , \quad \sigma_x^2 = var x = \theta^2$

ص 280: 8 تلفن در یک ساعت به مرکزی زده می‌شود. الف) (در نیم ساعت اول حداقل یک تلفن زده می‌شود) P

x: تعداد تلفن‌هایی که در نیم ساعت زده می‌شود

الف) $P\left(\text{در نیم ساعت اول حداقل یک تلفن}\right) = ?$ $\quad x \sim P(\lambda)$

ساعت	تلفن
1	8
0.5	$\lambda = 4 \rightarrow x \sim P(4)$

$P(x \geq 1) = 1 - P(x \leq 0) = 1 - \begin{pmatrix} \lambda = 4 \\ r = 0 \end{pmatrix} = 1 - 0.$ (جدول)

ب) $P\left(\text{تلفن بعدی لااقل یک ساعت بعد از اولین تلفن زده شود}\right)$

y: فاصله زمانی بین دو تلفن

$y \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{8}\right) \qquad f(y) = \frac{1}{\frac{1}{8}} e^{-\frac{y}{1/8}} = 8e^{-8y}$

$\theta = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{8}$

$P(y \geq 1) = \int_1^{+\infty} f(y)\,dy = \int_1^{\infty} 8e^{-8y}\,dy = e^{-8}$

ج) P(تلفن بعدی در کمتر از ۱۷ دقیقه زده شود) — متغیر Y چون

$$P(Y<17 \text{ دقیقه}) = P\left(Y<\frac{17}{60} \text{ ساعت}\right)$$

$$= \int_0^{\frac{17}{60}} f(y)\,dy = \int_0^{\frac{17}{60}} 8e^{-8y}\,dy = -e^{-8y}\Big|_0^{\frac{17}{60}} = 1-e^{-8\times\frac{17}{60}} =$$

2) توزیع نرمال (طبیعی، هنجار، زنگوله‌ای):

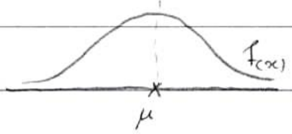
فرض کنیم متغیر تصادفی x دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ^2 است و می‌نویسیم ($X\sim N(\mu,\sigma^2)$) همراه تابع چگالی آن به صورت زیر باشد

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \quad x\in R$$

نیازی به حفظ نیست

که در آن μ همان Ex یا میانگین جامعه‌ای است که x از آن انتخاب شده و σ^2 همان $var\,x$ یا واریانس جامعه‌ای است که x از آن انتخاب شده است.

نمودار توزیع نرمال (منحنی)



- توزیع نرمال استاندارد (گاوسی)

$x\sim N(\mu,\sigma^2)$: متغیر نرمال

$Z=\frac{x-\mu}{\sigma}$: متغیر نرمال استاندارد

$$\mu_z = EZ = E\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{Ex-\mu}{\sigma} = \frac{\mu-\mu}{\sigma} = 0$$

$$\sigma^2 = var\,Z = var\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}var\,x = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

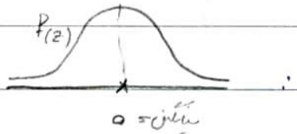
نرمال استاندارد شد با پارامترهای ۰ و ۱ ← $Z\sim N(0,1)$: متغیر نرمال استاندارد ⇐

اگه ۰ و ۱ نباشن نرمال معمولیه.

تابع چگالی توزیع نرمال استاندارد:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}z^2}, \quad z\in R$$

منحنی نرمال استاندارد:

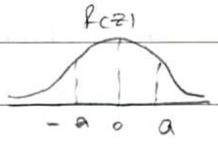


نرمال معمولی رو شیفت میدیم جوری که وسطش روی مبدا باشه.

Year. Month. Day. Subject.

• ویژگی نرمال استاندارد:

$P(z \leq -a) = P(z \geq a)$



$\int_a^{+\infty} f(z)\,dz = P(z \geq a)$

جدول توزیع نرمال استاندارد ، ص 479

$-3,2 \ , \ 0.01 \longrightarrow P(z < -3,21)$

$1,6 \ , \ 0.05 \longrightarrow P(z < 1,65)$ — یعنی مساحت قبل 1,65 چقدره

$P(z <$ حاشیه $) =$ متن — (حاشیه جدول ، عددهای داخل جدول)

مثال: $P(z < 1,65) = 0.9505$

$P(z > -3,21) \xrightarrow{\text{روش ①}} P(z < 3,21)$

$\xrightarrow{\text{روش ②}} 1 - P(z < -3,21)$

نصف نمودار: $P(z < 0) = \frac{1}{2}$

مساحت: $P(z < 7,23) \cong 1$

$P(z < -9,96) \cong 0$

بیشترین عدد تو جدول $\simeq 0.9993$

$P(z < -0.06) = 0.4761$

$P(z < +0.06) = 0.5239$ } $\oplus = 1$

- استاندارد کردن متغیرهای غیر استاندارد:

مثال: هرگاه $X \sim N(2,9)$ باشد، مطلوب است $P(X < 5)$

استاندارد: $P(X<5) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{5-2}{\sqrt{9}}\right) = P(Z<1) = 0.8413$

مثال ص 285 :

نمرات دروس: $X \sim N(12, 2^2)$ (واریانس)

الف) $P(\text{قبول نشدن}) = \frac{25}{500} = \frac{5}{100} \Rightarrow P(X \geq a) = 0.05$

$\xrightarrow{\text{استاندارد}} P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{a-12}{2}\right) = 0.05 \rightarrow P\left(Z \geq \frac{a-12}{2}\right) = 0.05 = P\left(Z < \frac{12-a}{2}\right) = 0.05$

$\Rightarrow \frac{12-a}{2} = -1,65 \longrightarrow a = 15,3$

z	0.05
-1,6	(0.05)

نزدیک‌ترین عدد به 0.05 را (که چقدر است) تو جدول میابیم

از جدول احتمال

ب) چند نفر نمره‌شان 15 تا 17 است؟

$P(15 < X < 17) = P\left(\frac{15-12}{2} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{17-12}{2}\right) = P(1,5 < Z < 2,5)$

$= P(Z < 2,5) - P(Z < 1,5) = 0.0606$

$P = \frac{n}{N} \Rightarrow 0.0606 = \frac{n}{500} \longrightarrow n = 30$

جمع

42, 41, 40, 39, 32, 29, 28, 27, 25, 20, 19, 18, 18, 13   331 ص

تا حذف

Year. Month. Day. Subject.

ج) Y = تعداد افرادی که نمره آن‌ها بین ۱۵ تا ۱۷ است $Y \sim Bin(5, P)$

$P = P(\text{نمره بین ۱۵ تا ۱۷}) = \text{ب} = 0.0606$ $Y \sim Bin(5, 0.0606)$

$P(Y \le 1) = P(Y=0) + P(Y=1) = \binom{5}{0}(0.0606)^0(1-0.0606)^{5-0} + \binom{5}{1}(0.0606)^1(1-0.0606)^{5-1} =$

قضایای توزیع نرمال:

۱) قضیه ترکیب خطی متغیرهای نرمال:

هر ترکیب خطی از متغیرهای نرمال، خود متغیر نرمال است که پارامترهای آن به ترتیب امید ریاضی و واریانس ترکیب خطی می‌باشد. یعنی:

متغیرهای نرمال: $X_1, \dots, X_n$

T: ترکیب خطی $X_1, \dots, X_n$ $T \sim N(?, ??)$ $? = ET$ $?? = varT$

مثال ص 329

نمره ۳ واحدی: $X \sim N(15, 9)$ x, y مستقل

نمره ۲ واحدی: $Y \sim N(19, 4.5)$ $P(\text{معدل} > 16) = ?$

$\text{معدل} = T = \frac{3X+2Y}{5} \Rightarrow T \sim N(?, ??) \rightarrow ? = ET = E\left(\frac{3X+2Y}{5}\right) = \frac{3EX + 2EY}{5} =$

$?? = varT = var\left(\frac{3X+2Y}{5}\right) = \frac{9}{25}varX + \frac{4}{25}varY + 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)Cov(X,Y) = 3.96$

(فرمول واریانس خطی)

$\Rightarrow T \sim N(19.6, 3.96)$ $P(T > 16) = P\left(\frac{T-\mu}{\sigma} > \frac{16-19.6}{3.96}\right) = P(Z > 0.7) = P(Z < -0.7) = 0.242$ (جدول نرمال)

۲) قضیه حد مرکزی:

هرگاه $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی با توزیع دلخواه F_X (نه لزوماً نرمال) باشند به طوری که داشته باشیم:

① $\sigma^2 < \infty$ (واریانس جامعه F_X متناهی باشد)

② $n \to \infty$ (حجم نمونه بزرگ باشد)

آنگاه: الف) $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ ، ب) $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

که در آن μ ، σ^2 به ترتیب میانگین … جامعه‌ای است که دارای توزیع F_X می‌باشد.

$x \sim Bin(n,p) \xrightarrow[\{p\to 0,\ p\to 1\}]{n\to\infty} X \sim P(\lambda = np)$ پواسون میرسه

Year. Month. Day. Subject.

مثال ص 290 نمونه تصادفی $x_1 - x_{100}$ را از توزیع پواسون در نظر می‌گیریم، میانگین = ۹. احتمال اینکه میانگین نمونه بیشتر از ۵ باشد

$\lambda = \mu = \delta^2 = 9$ ← پواسون

① $\delta^2 = 9 < \infty$, ② $n = 100 \to \infty$ ✓

$\xrightarrow{\text{قضیه}} \bar{x} \sim N(\mu, \frac{\delta^2}{n}) \Rightarrow \bar{x} \sim N(9, \frac{9}{100}) \Rightarrow P(\bar{x} > 5) =$

$P(\frac{\bar{x}-\mu}{\delta} > \frac{5-9}{\sqrt{\frac{9}{100}}}) = P(Z > 5) \cong 0$

3) تقریب توزیع دوجمله‌ای با استفاده از توزیع نرمال : $X \sim Bin(n,p) \xrightarrow{n\to\infty} X \sim N(np, npq)$

اگه n عدد بزرگی باشه و p تو بازه‌ی نرمال خودش (۰٫۱ تا ۰٫۹) باشه

نکاتی که در تصحیح پیوستگی باید رعایت کنیم :

① $P(x<b) = P(x<b+0.5)$ بادون ...

② $P(a<x) = P(a-0.5<x)$

③ $P(a<x<b) = P(a-0.5<x<b+0.5)$

④ $P(x=a) = P(a \leq x \leq a) = P(a-0.5 \leq x \leq a+0.5)$

مثال : ص 292 احتمال اینکه حداقل 32 عضو این نمونه از 3 بزرگتر باشند. $x_1, \dots, x_{72} \sim f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x>1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$ (پیوسته)

y : تعداد عضوهایی که از 3 بزرگتر باشد در بین 72 تا $Y \sim Bin(72, P)$

$P = P(\text{عضو بزرگتر از 3 باشه}) = P(x>3) = \int_3^{+\infty} f(x)dx = \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \frac{-1}{x}\Big|_3^{+\infty} = \frac{1}{3}$

$Y \sim Bin(72, \frac{1}{3}) \xrightarrow{n\to\infty} Y \sim N(72 \times \frac{1}{3}, 72 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3})$

$P(Y \geq 32) \overset{\text{ت.پ}}{=} P(Y \geq 31.5) = P(\frac{Y-np}{\sqrt{npq}} \geq \frac{31.5 - 72 \times \frac{1}{3}}{\sqrt{72 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}}) = P(Z \geq 1.87) = P(Z < -1.87) \overset{\text{جدول}}{=} 0.307$

فصل ۷ - برآورد (تخمین زدن) ← نقطه‌ای

↖ فاصله‌ای *

« برآورد نقطه‌ای » ⟷ « پارامتر »

$\bar{x}$ میانگین نمونه	μ میانگین جامعه
S^2 واریانس نمونه	σ^2 واریانس جامعه
$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{\text{تعداد موردی}}{\text{تعداد کل}}$ نسبت در نمونه	P نسبت جامعه *
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ تفاضل میانگین دو نمونه	$\mu_1 - \mu_2$ تفاضل میانگین دو جامعه
$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ تفاضل نسبت در دو نمونه	$P_1 - P_2$ تفاضل نسبت در دو جامعه

* برآورد فاصله‌ای (فاصله‌ی اطمینان)

$$P(a < \theta < b) = 1-\alpha$$

θ: پارامتر — a, b: کران‌های اطمینان — $1-\alpha$: سطح اطمینان ← عدد بزرگ

توی سوال اگه کوچیک باشه نمی‌خوده رو دادن ← عدد بزرگ

$\Rightarrow P(\underbrace{d-c}_{a} < \theta < \underbrace{d+c}_{b}) = 1-\alpha$ ← فاصله اطمینان برای θ ⟸ $\theta: d \mp c$

جدول t ص ۴۸۱ (سطر درجه آزادی)

df	$t_{.995}$	$t_{.99}$	...	$t_{.55}$
1				
2				
3		$t_{.99,3}$		
⋮				
120				

جدول χ^2 (خی‌دو - کای‌دو) ص ۴۸۰

	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.99}$	...	$\chi^2_{.005}$
1				
2				
3		$\chi^2_{.99,3}$		
⋮				
100				

① فاصله اطمینان برای میانگین جامعه (μ)

الف) وقتی واریانس جامعه (σ^2) معلوم باشد

حفظ: $\mu: \bar{x} \mp \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

جدول توزیع نرمال ص ۴۷۹

Z	۰٫۰c
a,b	← $1-\frac{\alpha}{2}$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = a,bc$

ب) وقتی واریانس جامعه (σ^2) مجهول و حجم نمونه بزرگ باشد ($n \geq 30$)

$\mu: \bar{x} \mp \frac{S}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

	۰٫۰c
a,b	← $1-\frac{\alpha}{2}$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = a,bc$

Year. Month. Day. Subject.

ج) وقتی واریانس جامعه (σ^2) مجهول بود و حجم نمونه کوچک باشد ($n<30$)

(بدست میاریم — بالای S)

$$\mu:\ \bar{x} \mp \frac{S}{\sqrt{n}}\, t_{(1-\frac{\alpha}{2}),(n-1)}$$

	$t_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$n-1$	$t_{(1-\frac{\alpha}{2}),(n-1)}$

$\longrightarrow df =$ درجه آزادی $= n-1 =$ حجم نمونه -1

② فاصله اطمینان برای P (نسبت در جامعه)

$$P:\ \hat{p} \mp \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\ Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = a{,}bc$, $\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{\text{تعداد پیروزی}}{\text{تعداد کل}}$, $\hat{q} = 1-\hat{p}$

Z	$0{,}0c$
$a{,}b$	$\leftarrow 1-\frac{\alpha}{2}$

③ فاصله اطمینان برای σ^2 (واریانس جامعه)

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2}),(n-1)}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},(n-1)}}$$

تو صورت سؤال همین عبارتو نشان میده

χ^2	$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$
$n-1$	I	II

$\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2}),(n-1)} = \text{I}$

$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},(n-1)} = \text{II}$

ص 365 مثال: اگر نمونه تصادفی به اندازه 20 از جامعه نرمال با واریانس 225 دارای میانگین نمونه 64,3 باشد، فاصله اطمینان 95% پیدا کنید.

$\sigma^2 = 225$, $\bar{x} = 64{,}3$, $1-\alpha = 0{,}95 \longrightarrow$ ① جدول Z

$\mu:\ \bar{x} \mp \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $\quad 1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$

جدول Z $\leftarrow$ σ^2 معلوم

σ^2 مجهول $\rightarrow \begin{cases} n \ge 30 \rightarrow \\ n < 30 \rightarrow \end{cases}$

$\longrightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}975 \longrightarrow Z_{0{,}975} \overset{\text{جدول}}{=} 1{,}96$

Z	$0{,}06$
$1{,}9$	$\leftarrow 0{,}975$

$\longrightarrow \mu:\ \bar{x} \mp \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \longrightarrow \mu: 64{,}3 \mp \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{20}} \times 1{,}96 \longrightarrow 57{,}7 < \mu < 70{,}9$

ص 365 x توزیع نرمال، فاصله اطمینان 95 درصدی.

10 تا عدد داده تو صورت سؤال به عنوان نمونه

$\rightarrow 92, 99, 91, 97, 96, 99, 100, 93, 95, 98$

$1-\alpha = 0{,}95$, $n = 10$ $\longrightarrow$ جدول T

$$\mu:\ \bar{x} \mp \frac{S}{\sqrt{n}}\, t_{(1-\frac{\alpha}{2}),(n-1)}$$

$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{92+99+\cdots+98}{10} = 95{,}5$ (فصل 1)

$S^2 = \frac{1}{n-1}\left\{\sum x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)^2\right\} = 9{,}16$ $\quad 1-\alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}975$

$t_{(1-\frac{\alpha}{2}),(n-1)} = t_{0{,}975,(10-1)} = 2{,}26$ $\quad \mu: 95{,}5 \mp \frac{\sqrt{9{,}16}}{\sqrt{10}}(2{,}26) \Rightarrow 93{,}34 < \mu < 97{,}66$

	$t_{0{,}975}$
	$\uparrow$

Year. Month. Day. Subject.

مثال نسبت ص 370 در نمونه تصادفی با حجم ۶۹۰ کالا، ۱۶۰ کالا غیراستاندارد. فاصله اطمینان ۹۵٪ ← برای نسبت تمام کالاهای غیراستاندارد

$n=690,\ x=160,\ 1-\alpha=0{,}95 \quad p:\ \hat{p}\mp\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\ z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$\hat{P}=\frac{x}{n}=\frac{160}{690}=0{,}25 \quad \hat{q}=1-\hat{p}=0{,}75 \quad 1-\alpha=0{,}95\longrightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0{,}975$

$\longrightarrow z_{0{,}975}=1{,}96$ (جدول: z | $0{,}06$; $1{,}9$ | $0{,}975$)

$\Longrightarrow P:0{,}25\mp\sqrt{\frac{0{,}25\times0{,}75}{690}}\times1{,}96 \longrightarrow 0{,}21<P<0{,}28$

مثال خی ص 379 نمرات کلاس نمونه 25 تایی.

$n=25$

$\sum_{1}^{n}x_i=252{,}7 \qquad 1-\alpha=0{,}90$

$\sum_{1}^{25}x_i^2=2579{,}7 \qquad S^2$ با فرمول ③ $\longrightarrow S^2=\frac{1}{n-1}\left\{\sum x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)^2\right\}=1{,}06$

$1-\alpha=0{,}90\longrightarrow\alpha=0{,}10\longrightarrow\frac{\alpha}{2}=0{,}05\longrightarrow \chi^2_{(\frac{\alpha}{2}),(n-1)}=\chi^2_{0{,}05,(25-1)}=\chi^2_{0{,}05,24}\overset{\text{جدول}}{=}13{,}8$ (خی)

$\alpha=0{,}1\longrightarrow\frac{\alpha}{2}=0{,}05\longrightarrow1-\frac{\alpha}{2}=0{,}95\longrightarrow\chi^2_{0{,}95,(25-1)}=\chi^2_{0{,}95,24}\overset{\text{جدول}}{=}36{,}4$

$\xrightarrow{\text{فرمول}}\ \frac{(25-1)(1{,}06)}{36{,}4}\leqslant S^2\leqslant\frac{(25-1)(1{,}06)}{13{,}8}\longrightarrow 0{,}699<S^2<1{,}843$ با اطمینان ۹۰٪

④ فاصله اطمینان برای تفاضل میانگین دو جامعه $(\mu_1-\mu_2)$

الف) وقتی واریانس دو جامعه (σ_1^2,σ_2^2) معلوم باشند

$(\mu_1-\mu_2):(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\mp\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\ Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

ب) وقتی واریانس دو جامعه (σ_1^2,σ_2^2) مجهول بوده و حجم نمونه‌ها بزرگ باشند $(n_1, n_2\geqslant30)$

$(\mu_1-\mu_2):(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\mp\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\ Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

NOTEBOOK iman

399 → 6, 8, 11, 13, 20

فضاهای و ...

Year. Month. Day. Subject.

د) وقتی واریانس دو جامعه (σ_1^2, σ_2^2) مجهول بوده + حجم نمونه‌ها کوچک باشند $(n_1, n_2 < 30)$

+ واریانس دو جامعه برابر باشند $(n_1, n_2 < 30)$ + واریانس دو جامعه برابر باشند $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

واریانس ادغامی = واریانس آمیخته = $S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

$(\mu_1 - \mu_2) : (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \mp S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\; t_{(1-\alpha/2),(n_1+n_2-2)}$

⑤ فاصله اطمینان برای تفاضل نسبت دو جامعه $(P_1 - P_2)$

$(P_1 - P_2) : (\hat{P}_1 - \hat{P}_2) \mp \sqrt{\frac{\hat{P}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{P}_2\hat{q}_2}{n_2}}\; z_{1-\alpha/2}$

$\hat{P}_1 = \frac{x_1}{n_1}$, $\hat{q}_1 = 1 - \hat{P}_1$

$\hat{P}_2 = \frac{x_2}{n_2}$, $\hat{q}_2 = 1 - \hat{P}_2$

نتیجه‌گیری:

① عدد مثبت $< \mu_1 - \mu_2 <$ عدد مثبت → $\mu_1 - \mu_2 > 0 \Rightarrow \mu_1 > \mu_2$ → میانگین جامعه اول بزرگتره

② عدد منفی $< \mu_1 - \mu_2 <$ عدد منفی $\Rightarrow \mu_1 - \mu_2 < 0 \Rightarrow \mu_1 < \mu_2$ → میانگین جامعه اول کمتره

③ عدد منفی $< \mu_1 - \mu_2 <$ عدد مثبت → $\mu_1 - \mu_2 = 0 \Rightarrow$ اختلاف معنی‌داری بین دو جامعه نیست (بین میانگین)

مثال: ص 377

جامعه اول: $n_1 = 10$, $\bar{x}_1 = 3{,}1$, $S_1 = {,}5$ ، جامعه دوم: $n_2 = 8$, $\bar{x}_2 = 2{,}7$, $S_2 = {,}7$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$1-\alpha = {,}95$ تفاضل واقعی

$(\mu_1 - \mu_2) : (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \mp S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \cdot t_{(1-\alpha/2),(n_1+n_2-2)}$

$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{9({,}5)^2 + (n-1)({,}7)^2}{10+8-2} = {,}355$

$1-\alpha = {,}95 \rightarrow \alpha = {,}05 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = {,}975 \rightarrow t_{(1-\alpha/2),(n_1+n_2-2)} = t_{{,}975,(10+8-2)} = t_{{,}975,16} = 2{,}12$

$(\mu_1 - \mu_2) : (3{,}1 - 2{,}7) \mp \sqrt{{,}355}\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{8}}\,(2{,}12)$

$-{,}12 < \mu_1 - \mu_2 < 1$ → اختلاف معنی‌داری بین دو محصول وجود ندارد

Year. Month. Day. Subject.

فصل ٤ : آزمون فرض آماری

فرض صفر (H_0) : فرضی است که به درستی آن از گذشته تاکنون معتقد بوده ایم.

فرض مقابل (H_1) : ادعای جدید یا فرضی که می‌خواهیم درستی آن را آزمون کنیم.

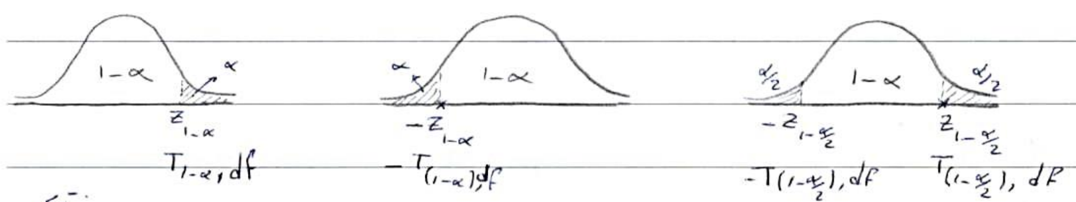
ناحیه بحرانی (c) : مجموعه ای است که به ازای آن نقاط، فرض صفر رد می‌شود. ناحیه رد H_0

آزمون فرض آماری : مجموعه مراحلی که پس از طی آن‌ها یکی از دو فرض H_0 یا H_1 پذیرفته و دیگری رد می‌شود.

- انواع آزمون های آماری

سمت راست همیشه عدد و سمت چپ پارامتر — پارامتر یکسان — عدد یکسان

① $\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta > \theta_0 \end{cases}$ ② $\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta < \theta_0 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta \neq \theta_0 \end{cases}$



نتایج

①' $\begin{cases} H_0: \theta_1 = \theta_2 \\ H_1: \theta_1 > \theta_2 \end{cases}$ ②' $\begin{cases} H_0: \theta_1 = \theta_2 \\ H_1: \theta_1 < \theta_2 \end{cases}$ ③' $\begin{cases} H_0: \theta_1 = \theta_2 \\ H_1: \theta_1 \neq \theta_2 \end{cases}$

(پارامتر)

چون باید یک طرف عدد باشد یک طرف پارامتر:

$\begin{cases} H_0: \theta_1 - \theta_2 = 0 \\ H_1: \theta_1 - \theta_2 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} H_0: \theta_1 - \theta_2 = 0 \\ H_1: \theta_1 - \theta_2 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} H_0: \theta_1 - \theta_2 = 0 \\ H_2: \theta_1 - \theta_2 \neq 0 \end{cases}$

- مراحل انجام آزمون فرض آماری :

① ابتدا فرض صفر و فرض مقابل را به یکی از 3 صورت فوق تشکیل داده و ناحیه بحرانی را رسم می‌کنیم و سپس Z یا T بودن را براساس قضیه تشکیل می‌دهیم و سپس مقدار Z یا T مرزی را از روی جدول بدست آورده و روی شکل قرار می‌دهیم.

② مقدار Z یا T محاسباتی را به یکی از 8 صورت زیر تشکیل داده و مقدار عددی آن را محاسبه کرده و آن را Z یا T محاسباتی می‌نامیم.

③ مقدار عبارت محاسباتی حاصل از مرحله ② را بر روی شکل حاصل از مرحله ① قرار داده و دو مقدار عددی حاصل را باهم مقایسه می‌کنیم. چنانچه عبارت محاسباتی در ناحیه هاشور خورده (بحرانی) بیفتد، فرض H_0

NOTEBOOK iman

Year. Month. Day. Subject.

را رد می‌کنیم . در غیر این صورت آن را می‌پذیریم .

- عبارت های محاسباتی مرحله ② آزمون :

(اینو یعنی رو باید از روی H_0 داریم — میانگین)

① $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ → آزمون میانگین ، σ^2 معلوم

② $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_{H_0}}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}$ → آزمون میانگین ، σ^2 مجهول ، $n \geq 30$ (n بزرگ)

③ $T = \dfrac{\bar{x} - \mu_{H_0}}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}$ → آزمون میانگین ، σ^2 مجهول ، $n < 30$ ، $df = n-1$

④ $Z = \dfrac{\hat{p} - p_{H_0}}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}}$ → آزمون نسبت ، $\hat{p} = \dfrac{x}{n}$ ، $\hat{q} = 1 - \hat{p}$

⑤ $Z = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_{H_0}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ → آزمون تفاضل میانگین ، σ_1^2 و σ_2^2 معلوم

⑥ $Z = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_{H_0}}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$ → آزمون تفاضل میانگین ، σ_1^2 و σ_2^2 مجهول ، $n_1, n_2 \geq 30$

⑦ $T = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_{H_0}}{S_p \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$ → آزمون تفاضل میانگین ، σ_1^2 و σ_2^2 مجهول ، $n_1, n_2 < 30$ ، $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$S_p^2 = \dfrac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$, $df = n_1 + n_2 - 2$

⑧ $Z = \dfrac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)_{H_0}}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}}$ → آزمون تفاضل نسبت

$\hat{p}_1 = \dfrac{x_1}{n_2}$, $\hat{q}_1 = 1 - \hat{p}_1$

$\hat{p}_2 = \dfrac{x_2}{n_2}$, $\hat{q}_2 = 1 - \hat{p}_2$

H_0 → تو ناحیه هاشور خورده H_0 رد می‌شه

NOTEBOOK iman

Year. Month. Day. Subject.

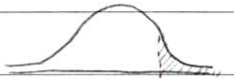
(T8) 10, 12, 14, 14, 15, 18, 11, 13

مثال ص ۴۱۲ : نمرات کلاس دارای توزیع نرمال است

در سطح ۰٫۰۱ (α) آیا می‌توان ادعا کرد میانگین نمرات کلاس بیشتر از 10,5 است؟

$$\begin{cases} H_0: \mu = 10{,}5 \\ H_1: \mu > 10{,}5 \end{cases}$$

$\alpha = 0{,}01 \quad n = 8$



$T_{0{,}99,\,8-1} = 3$

	$t_{0,99}$
7	(3)

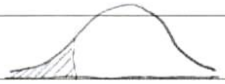
فرمول 3: $T_{محاسبه} = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \dfrac{14 - 10{,}5}{\frac{\sqrt{10{,}28}}{\sqrt{8}}} = 3{,}09 \xrightarrow{>3}$ H_0 رد می‌شود ← H_1 پذیرفته شده

ادعا درست است (چون توقعات‌ها اثر خورده است)

$\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{n} = \dfrac{10 + 12 + \cdots + 13}{8} = 14 \qquad S^2 = \dfrac{1}{n-1}\left\{x_i^2 - \dfrac{1}{n}\left(\sum x_i\right)^2\right\} = \cdots = 10{,}28$

ص ۴۱۷ یک کارخانه مدعی است کمتر از ۲۰٪ محصولات غیراستاندارد است. در $n = 200$ بررسی، 22 غیراستاندارد بود.

$$\begin{cases} H_0: p = 0{,}20 \\ H_1: p < 0{,}20 \end{cases} \qquad \alpha = 0{,}01$$



$-Z_{0{,}99} = -2{,}33$

	0,03
2,3	(0,99)

$Z_{محاسباتی} = \dfrac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}} \qquad \hat{p} = \dfrac{x}{n} = \dfrac{22}{200} = 0{,}11 \qquad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0{,}89$

$\rightarrow Z_{محاسبه} = \dfrac{0{,}11 - 0{,}20}{\sqrt{\frac{0{,}11 \times 0{,}89}{200}}} = -4{,}06 \rightarrow$ H_0 رد می‌شود ← H_1 پذیرفته می‌شود ← ادعا درست است

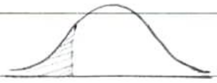
مثال ص ۴۱۵

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$$

جامعه اول	جامعه دوم
$n_1 = 4$	$n_2 = 4$
$\bar{x}_1 = 512$	$\bar{x}_2 = 492$
$S_1 = 31$	$S_2 = 26$

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$\alpha = 0{,}05$



$-T = -1{,}94$
$0{,}95,\,(4+4-2)$

فرمول (7):

$T_{محاسباتی} = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \dfrac{512 - 492 - 0}{\sqrt{818{,}97}\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}} = 2{,}68$

$S_p = \dfrac{3(31)^2 + (3)(26)^2}{4+4-2} = 818{,}97$

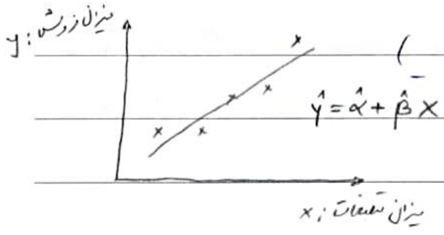
H_0 رد نمی‌شود ← H_1 رد می‌شود

ادعا درست نیست

NOTEBOOK iman

ف 7، 8، 9 ← 3 تا 4 نمره

Year. Month. Day. Subject.



فصل ۹ - رگرسیون (خط بازگشت، خط مستقیم برازش، خط پیش‌بینی)

$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X$

$$\hat{\beta} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

یا

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} \qquad \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}, \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}, \quad \hat{\beta} = \frac{n\sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

معادله خط رگرسیون: $y = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x$

(y: متغیر وابسته، x: متغیر مستقل)

n: تعداد نقاط در صفحه: زوج زوج می‌شماریم

ضریب همبستگی: $$\rho_{x,y} = \frac{S_{xy}}{S_{xx} S_{yy}} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2 . \sum (y_i - \bar{y})^2}$$

مثال ص 455: گلر

تعداد ساعت X	2	4	6	8	10	12
ته نشست کلر Y	1,8	1,5	1,4	1,1	1,1	0,9

ته نشست کلر (y) = f(تعداد ساعت (x))

$\sum x_i = 2 + 4 + \dots + 12 = 42$

$\sum y_i = 1{,}8 + 1{,}5 + \dots + 0{,}9 = 7{,}8$

$\sum x_i y_i = 2 \times 1{,}8 + \dots + 12 \times 0{,}9 = 48{,}6$

$\sum x_i^2 = 2^2 + \dots + 12^2 = 364$

$n = 6$

$$\hat{\beta} = \frac{6(48{,}6) - (42)(7{,}8)}{6(364) - (42)^2} = -0{,}086 \qquad \hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} = \frac{\sum y_i}{n} - (-0{,}086)\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = 1{,}89$$

معادله خط: $y = 1{,}89 - 0{,}086\, x$

حذف: فصل ۱ کامل (به جز نمودارها)، فصل 2 کامل به جز جایگشت‌ها

*فصل 3 همه به جز ص 142 (توزیع احتمال چندمتغیره)

فصل ۴ همه به جز اثبات‌ها

*فصل 5 توزیع دوجمله‌ای منفی و یکنواخت (گسسته و پیوسته) حذف

(بیشتر نمره)

فصل 6 حذف - 7 محاسبه خطا، حجم نمونه، فاصله اطمینان برای نسبت واریانس‌ها حذف

ف 8 - انواع خطاها، توان آزمون و ص 421 تا آخر حذف - ف ۹ هم هرچی گفته شد